Beachte: Aufgaben mit Stern (*) sind nur Beispiele für einen Aufgabentypus. Es wird erwartet, daß sie auch mit veränderten Angaben gelöst werden können.

Inverse Matrix

(48*) *(Methodenvergleich)*
Ermittle die Inversen der Matrizen aus (39) und (40) *(wenn möglich)*
(a) mittels (42) und (b) durch Gaußsche Elimination.

Eigenwerte

(49*) *(Eigenwerte und Eigenvektoren)*
Bestimme für folgende Matrizen die Eigenwerte und die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$

(*Hinweis:* Die Eigenwerte sind bei (f) ganzzahlig!)

Lineare Operatoren

(50) *(Parallel- und Zentralprojektion)*
Es sei V der durch $(0,0,0)$ $(-1,0,1)$ und $(1,1,1)$ aufgespannte Teilraum des $\mathbb{R}^3$ (*Ebene im Raum*).
Für $P \in \mathbb{R}^3$ sei $\varphi_1(P) \in V$ die Projektion von P auf V parallel zur x_2-Achse (*Schatten durch eine unendlich ferne Lichtquelle (Sonne)*)
und $\varphi_2(P) \in V$ sei die Projektion von P auf V aus dem Punkt $(0,10,0)$ (*Schatten durch eine Lichtquelle (Lampe)*).
(a) Drücke $\varphi_1(P)$ und $\varphi_2(P)$ durch die Koordinaten von P aus.
(b) Sind φ_1 und φ_2 lineare Operatoren von $\mathbb{R}^3$ nach V?

Inneres Produkt

(51) *(Parallelogrammregel)*
(a) Beweise: Für jede durch ein inneres Produkt induzierte Norm gilt:
$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$
(b) Gilt (a) für die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$? Was läßt sich daraus schließen?

(52*) *(Orthogonalisierung)*
Wende das Gram-Schmidtsche Verfahren auf folgende Vektoren im $\mathbb{C}^3$ (*mit Standardskalarprodukt*) an:
(a) $v_1 = (1,0,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (0,1,1)$
(b) $v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)$
(c) $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)$
(d) $v_1 = (1,0,\mathrm{i}), v_2 = (1,\mathrm{i},0), v_3 = (0,\mathrm{i},1)$

(53) *(Polynomfunktionen)*
Für die Polynomfunktionen über einem Intervall I ist
$\langle f, g\rangle := \int_I fg$ ein inneres Produkt.
Betrachte die Polynomfunktionen höchstens dritten Grades
für $I = (0, 1)$ und für $I = (-1, 1)$:
(a) Ermittle Längen und Winkel für die durch die Terme $1, x, x^2, x^3$ definierten Polynomfunktionen p_0, p_1, p_2, p_3.
(b) Stelle das innere Produkt bezüglich der Basis p_0, p_1, p_2, p_3 dar.
(c) Ermittle eine orthonormale Basis.
(d) Stelle die Funktion $p(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$ bezüglich dieser Basis dar.

(54) *(trigonometrische Polynome)*
Zeige: Die Funktionen
$t_{2n-1}(x) = \sin nx$ und $t_{2m}(x) = \cos mx$
(für alle $n, m \in \mathbb{N}, n \neq 0$) sind über $I = (-\pi, +\pi)$
(bzw. über jedem Intervall der Länge 2π) paarweise orthogonal.
Berechne ihre Norm.

(55*) *(Normalformen von Matrizen)*
Transformiere die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ auf Diagonalgestalt.
(Die Eigenwerte sind ganzzahlig.)

(56*) *(Drehung im Raum)*
Ein Würfel mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (im $\mathbb{R}^3$) wird um die Hauptdiagonale
(von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 1)$) um 120 Grad gedreht.
(a) Ermittle die Matrixdarstellung der Drehung (bezogen auf die Standardbasis).
(b) Ermittle die Eigenwerte und Eigenvektoren der Drehung.
(c) Ermittle eine Orthonormalbasis, bei der die Drehachse Koordinatenachse ist.
(d) Ermittle die Formeln zur Umrechnung zwischen den beiden Koordinatensystemen.
(e) Welche der auftretenden Matrizen sind orthogonal?

(57*) *(quadratische Formen)*
Ist $\varphi(v, w)$ eine symmetrische Bilinearform, so heißt $q(v) := \varphi(v, v)$ quadratische Form.
(a) Es sei $q(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$ (im $\mathbb{R}^3$).
Ermittle die symmetrische Bilinearform $\varphi(v, w) = v^t A w$, zu der q gehört.
(b) Ermittle die Eigenwerte und Eigenvektoren zu A.
(c) Stelle φ in bezüglich einer Basis von (normierten) Eigenvektoren dar.
(d) Wie sieht die durch $q(v) = 1$ beschriebene Fläche aus?
(Betrachte dazu die Schnittkurven mit geschickt gewählten Ebenen!)

Wird fortgesetzt!

Bemerkung:

Aufgaben, die im Proseminar nicht mehr besprochen werden können, dienen als Material zur Selbstkontrolle!

Wiederholungsaufgaben

(38B*) *(Basiswechsel)*

Es seien $v_1 = (5, 2, 1), v_2 = (2, 2, 1), v_3 = (0, 0, 1)$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Durch $\varphi(v_1) = 12$, $\varphi(v_2) = 9$ und $\varphi(v_3) = 3$, sowie durch $L(v_1) = (4, 1, 1)$, $L(v_2) = (1, 1, 1)$ und $L(v_3) = (-1, -1, 1)$ seien eine lineare Abbildung φ und ein linearer Operator L definiert. Ferner sei $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ eine weitere Basis.

(a) Stelle φ und L bezüglich der Standardbasis dar.

(b) Stelle φ und L bezüglich B dar.

(c) Ermittle eine Matrizenformel zur Umrechnung von Koordinaten bezüglich v_1, v_2, v_3 auf Koordinaten bezüglich B.

(d) Erprobe diese Formel an (b).