Name/Matrikelnummmer/Kennziffern:

Beachte: Bitte ordnen Sie die Lösungen übersichtlich an
und geben Sie auf **jedem** Blatt den Namen an!

(1) *(Matrizen)*

Es seien $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,
und $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $CD - CF$

(b) Überprüfe das Assoziativgesetz anhand von BAG.

(c) Folgt für quadratische Matrizen aus $AB = \mathrm{o}$, daß $A = \mathrm{o}$ oder $B = \mathrm{o}$? Warum?

(2) *(Koordinatensysteme)*

(a) Welche Koordinaten hat $P = (4, 9) \in \mathbb{R}^2$ in dem
durch $O = (1, 2), E_1 = (1, 4), E_2 = (2, 3)$ definierten Bezugssystem?

(b) Eine Ebene im Raum – Koordinaten (x, y, z) –
geht durch die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Ermittle ihren Schnitt mit der x-y-Ebene und
den Schnittpunkt mit der Geraden, die durch $(1, 1, 1)$ und den Ursprung geht.

(3) *(Teilräume)*

(a) Liegt $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ in dem von $(2, 0, 1)$ und $(-1, 3, 0)$ erzeugten Teilraum?

(b) Sind die folgenden Teilmengen Teilräume (*mit Begründung!*)?

(b1) $\{(x^2, x^2, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

(b2) $\{(x, y, z, t) \mid x = ct, y = z = ax\} \subset \mathbb{R}^4$ $(a, c \in \mathbb{R})$

(b3) $\{(x, y) \mid (x + y)(x - y) = 0, x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

(4) *(linear (un)abhängig)*

(a) Welche der folgenden Teilmengen sind linear unabhängig (*mit Begründung!*)?

(a1) $\{(1, 1, 0, -1), (0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\}$

(a2) $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ mit $v_1 = \mathrm{e}_1 + 3\mathrm{e}_2$, $v_2 = 2\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3$, $v_3 = 3\mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2 + 3\mathrm{e}_3$

(a3) $\{(x, y, z), (x^2, y^2, z^2), (x^3, y^3, z^3), (x^4, y^4, z^4)\} \subset \mathbb{R}^3$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$

(a4) $\{(1 - \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}, 1), (2, 2\mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}), (1, 0, 0)\} \subset \mathbb{C}^3$

(b) Wird durch

$$\varphi(1, 1, 0) = \varphi(1, 0, 1) = \varphi(0, 1, 1) = 1 \text{ und } \varphi(3, -2, -1) = 0$$

eine lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^3$ eindeutig bestimmt? Warum?
Wenn ja: Welchen Wert hat $\varphi(1, 1, 1)$?