

Name/Matrikelnummer/Kennziffern:

Beachte: Bitte ordnen Sie die Lösungen übersichtlich an und geben Sie auf **jedem** Blatt den Namen an!

(1) (*Determinante*)

$$\text{Es sei } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechne $\det A$.
- (b) Ist 0 Eigenwert von A ? Warum?
- (c) Ist A invertierbar? Warum?

(2) (*Eigenwerte*)

$$\text{Es sei } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ und } C = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von B .
- (b) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von C .
- (c) Sind B und C diagonalisierbar über \mathbb{R} und über \mathbb{C} ?

(3) (*Funktionsräume*)

Wir betrachten den Vektorraum \mathcal{F} der reellen Funktionen über dem Einheitsintervall $(0, 1)$ mit dem inneren Produkt $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

- (a) Bilden die Funktionen der Form $\lambda \sin x + \mu \log x$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) einen Teilraum? Warum? Welche Dimension hat der Teilraum? Warum?
- (b) Bilden die differenzierbaren Funktionen mit konstanter Ableitung einen Teilraum? Warum?
- (c) Bilden die Funktionen mit mindestens einer Nullstelle einen Teilraum? Warum?
- (d-e) Betrachte den Teilraum der Polynomfunktionen mit Grad höchstens 1 (also: $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$).
- (d) Schreibe das innere Produkt bezüglich der Basis p_0, p_1 ($p_0(x) = 1, p_1(x) = x$).
- (e) Finde eine Orthonormalbasis.

(4) (*lineare Operatoren*)

Es seien (x, y) die Koordinaten von Punkten der Ebene bezüglich eines orthornormalen Bezugssystems mit Ursprung O (kartesische Koordinaten).

- (a) Ermittle die Darstellung der Drehung δ um 30 Grad (um O) bezüglich der Standardbasis.
- (b) Stelle die Projektion π parallel zu $(1, 1)$ auf die x -Achse bezüglich der Standardbasis dar.
- (c) Ist der durch $\varphi(x, y) := (2x + 3y, x + 2y)$ definierte Operator eine Isometrie? Warum?
- (d) Stelle φ bezüglich der Basis $v = (1, 3), w = (1, 2)$ dar.
- (e) Welche Eigenwerte und Eigenvektoren habe δ und π ? Was bedeuten sie?