Vektorraum V (über K) Vektoren $v \in V$, Skalare $\lambda \in K$

(Definition) Ein Vektor v heißt

Linearkombination der Vektoren v_i $(i = 1, \ldots, n)$

falls $$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$ (für passende λ_i).

Man sagt auch: v ist als Linearkombination der v_i darstellbar.

Der Nullvektor ist durch jede (nicht-leere) Menge von Vektoren darstellbar:

$$\mathrm{o} = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot v_i, \text{ die triviale Darstellung}$$

(Es gilt:)

Die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren einer Menge $S \subset V$ ist ein Teilraum, der von S **erzeugte** (oder aufgespannte) **Teilraum**.

Wir schreiben: $$\langle S \rangle := \left\{ v \;\middle|\; v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_i \in S, \lambda_i \in K, n = 1, 2, \ldots \right\}$$

Es gilt: $\langle S \rangle$ ist der kleinste Teilraum der S enthält.

und: $\langle S \rangle$ ist der Durchschnitt aller Teilräume, die S enthalten.

S heißt **linear unabhängig** (*oder:* ist eine linear unabhängige Menge)
:⇔ der Nullvektor ist nur trivial durch (paarweise verschiedene)
Vektoren aus S darstellbar

d.h. es gilt: $\mathrm{o} = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot v_i \ (v_i \in S) \quad \Rightarrow \ (\exists i_1 \neq i_2)\ v_{i_1} = v_{i_2} \vee (\forall i)\ \lambda_i = 0$

S heißt **linear abhängig** (*oder:* ist eine linear abhängige Menge),
:⇔ S ist nicht linear unabhängig
:⇔ Der Nullvektor ist eine nicht-triviale Linearkombination
von Vektoren aus S

d.h. es gilt: $\mathrm{o} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \ (v_i \in S, i \neq j \ \Rightarrow \ v_i \neq v_j) \quad \Rightarrow \ (\forall i)\ \lambda_i = 0$

(Definition) Basis *eines Vektorraums*

$B \subset V$ heißt **Basis**, wenn B linear unabhängig ist und V erzeugt.

B ist Basis von V ⇔ B ist eine maximale linear unabhängige Menge
⇔ B ist eine minimale V erzeugende Menge
⇔ jedes $v \in V$ ist *(bis auf die Reihenfolge)*
auf genau eine Art Linearkombination von Vektoren aus B

Vektorraum K^n		$:\Leftrightarrow$ Menge der geordneten n-tupel über K
$x \in K^n$	$x = (x_i) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$x_i \in K, i = 1, \ldots, n$
$x, y \in K^n$	$x + y \coloneqq (x_i + y_i)$	Addition
$\lambda \in K, x \in K^n$	$\lambda \cdot x \coloneqq (\lambda x_i)$	Multiplikation mit Skalar
Einheitsvektoren $\mathrm{e}_k \coloneqq (\delta_{ki}) \in K^n$		$k = 1, \ldots, n$
Standardbasis *(kanonische Basis)* $\mathrm{E} = \{\mathrm{e}_k\}$		$\mathrm{e} \coloneqq \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix}$

es gilt: $$K^n \ni x = (x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{e}_i$$ Basisdarstellung

daher: $$[x]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}$$ Koordinaten(-vektor)

und $$\mathrm{e}\ [x]_E = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{e}_i = x \in K^n$$

endlichdimensionaler Vektorraum V (über K) $\dim V = n$

Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ Basisvektoren $b_i,\ i = 1, \ldots, n$

$b \coloneqq \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$ $(1 \times n)$-Matrix *(mit Vektoren als Elementen!)*

(Koordinaten-)Darstellung (bezüglich B)

(eindeutig!) Koordinaten $v_i \in K$

$$V \ni v = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i \quad \leftrightarrow \quad [v]_B \coloneqq \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1} \quad \textit{Spaltenvektor}$$

$$\leftrightarrow \ (v)_B \coloneqq (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in K^n$$

Es ist: $v = b\ [v]_B$ und $(v)_B = e\ [v]_B$

Die Abbildungen $[\cdot]_B : V \to \mathrm{M}_{n,1},\ v \mapsto [v]_B$

und $(\cdot)_B : V \to K^n,\ v \mapsto (v)_B$

sind **bijektive lineare Operatoren** (Isomorphismen)