...les abus de langage, sans lesquels tout texte mathématique risque de devenir pédantesque et même illisible, ...
N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*
Mode d'emploi de ce traité, p.III

einige endliche Gruppen — *finite groups*

$$(\{0\},+),\ (\{1\},\cdot),\ (\{1,-1\},\cdot)$$

(additive) Restklassengruppe	$(\mathbb{Z}_m,+)$	*residue classes*
prime Restklassengruppe	$(\mathbb{Z}_m^*,\cdot)$	*reduced residue classes*
symmetrische Gruppe	$(S_m,\circ)$	Permutationen (m Dinge)

Untergruppe (einer Gruppe $(G,\circ)$) *subgroup*

$$\varnothing \neq H \subset G \text{ ist Untergruppe von } G\ (H < G)$$

$$:\Leftrightarrow\ (H,\circ) \text{ ist Gruppe}$$

genauer: $(H,\circ_{/H})$ Einschränkung $\circ_{/H}$ von $\circ$ auf H

auch $H < G \ \Leftrightarrow\ (a,b\in H \ \Rightarrow\ a\circ b, a^{-1}\in H) \quad (\Rightarrow\ e\in H)$

oder $\varnothing \neq H < G \ \Leftrightarrow\ H\circ H^{-1}\subset H$

G endlich: $\varnothing \neq H < G \ \Leftrightarrow\ H\circ H\subset H$

Komplex-Multiplikation ($g\in G,\ A,B\subset G$)

$$A\circ B := \{g \mid g = a\circ b, a\in A, b\in B\}$$

$$a\circ B := \{a\}\circ B = \{g \mid g = a\circ b, b\in B\}$$

$\Rightarrow$ Monoid $(\mathcal{P}(G),\circ)$

(Links-)Nebenklasse $C(a) := a\circ H$ (modulo H)

Faktormenge $G/H := \{a\circ H \mid a\in G\}$

Kongruenz $C(a)\circ C(b) = C(ab)$ *(verträglich)*

$$\Leftrightarrow \quad (aH)(bH) = (ab)H \ \Leftrightarrow\ aH = Ha \ \Leftrightarrow\ aHa^{-1} = H \quad \Leftrightarrow$$

H **Normalteiler** in G $(H \triangleleft G)$ $:\Leftrightarrow$ *normal subgroup*

$$(\forall g\in G)\ gH = Hg \ \Leftrightarrow\ (\forall g\in G)\ gHg^{-1} = H \qquad \textit{(d.h.)}$$

Links- und Rechtsnebenklassen gleich $\Leftrightarrow$ G/H **Faktorgruppe**

$\Leftrightarrow$ H invariant *(unter Konjugation gHg^{-1})*

Beispiel: $(\mathbb{Z},+)/(m\mathbb{Z},+) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}_m,+)$