Punkt liegt auf Gerade: *Gerade geht durch Punkt:*

$P \in g$ $g \ni P$

$(\forall P, Q)\exists g : P \in g, Q \in g$ $(\forall g, h)\exists P : g \ni P, h \ni P$

$g = h \;\Leftarrow\; P \neq Q$ $P, Q \in g, h$ $g \neq h \;\Rightarrow\; P = Q$

Durch zwei *(verschiedene)* Punkte geht *(genau)* eine Gerade. Zwei *(verschiedene)* Gerade haben *(genau)* einen Schnittpunkt.

$P = [x^i] \in g$ $vx = \sum v_i x^i = 0$

Gleichung einer Geraden g (durch P) $v = [v_i] \ni P$

(Geradenkoordinaten)

Gleichung eines *(Geraden-)*Büschels durch g

$v = [v^i] \in \mathbb{P}^2$ Punkt v dual zur Geraden $g = [v_i] =: v^*$ $(v^i := v_i)$

$x^* := [x_i]$ Gerade x^* dual zum Punkt $P = [x^i] =: x$ $(x_i := x^i)$

$$P = x = [x^i] \in [v_i] = v^* = g \;\leftrightarrow\; v = [v^i] \in [x_i] = x^*$$

$$x = [x^i] \in v^* = [v_i] \;\leftrightarrow\; (x^i) \perp (v_i) \ \textit{(in } \mathbb{R}^3\textit{)}$$

Winkel ist keine affine (projektive) Invariante

$\Rightarrow$ Dualität ist basisabhängig

Basistransformation $e'_i = Ae_i$

$$v^{*\prime} x' = (v^* A^t)((A^t)^{-1} x) = v^*(A^t (A^t)^{-1}) x = v^* x$$

$(x'^i) = x' = (A^{-1})^t x$ $(v'_i) = v^{*\prime} = v^* A^t$

kontravarianter (Spalten-) Vektor *kovarianter (Zeilen-) Vektor*

(Satz von Pappus-Pascal)

Liegen P_1, P_3, P_5 und P_2, P_4, P_6 jeweils auf einer Geraden, so liegen die *(drei)* Schnittpunkte von *(den Verbindungsgeraden)* $P_i P_{i+1}$ und $P_{i+3} P_{i+4}$ auf einer Geraden.

(Satz von Brianchon)

Gehen g_1, g_3, g_5 und g_2, g_4, g_6 jeweils durch einen Punkt so gehen die *(drei)* Verbindungsgeraden der Schnittpunkte $g_i g_{i+1}$ und $g_{i+3} g_{i+4}$ durch einen Punkt.

---

analog: Dualität Punkt $\leftrightarrow$ Ebene *(Raum)* *und*
Punkt $\leftrightarrow$ Hyperebene *(allgemein)*