$\mathbb{E}^1$	*affine* Gerade *projektive*	$\mathbb{P}^1$
$\mathbb{R}^1$	Standardmodell	$\{U^1 \subset \mathbb{R}^2\}$
		$(\ U^1\ \textit{Teilraum},\ \dim U^1 = 1\ )$
$\mathbf{x} = (x_1)$	(metrische) Koordinaten	
	(projektive) Koordinaten	$\mathcal{X} = [1, x_1]$
		$(\ = [\lambda, \lambda x_1], \lambda \neq 0\ )$
Einbettung in Ebene	$\{1\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$	*Repräsentantensystem*
$(1, \mathbf{x}) = (1, x_1)$	X (eigentlicher Punkt)	$(1, \mathbf{x}) \in \langle (1, x_1) \rangle$
Richtung	(Fernpunkt) $(0,1)$	*Repräsentant*
	spezielle Punkte:	
$\mathbf{o} = (0)$	$O = (1,0) = f_0$	$\mathcal{F}_0 = [f_0]$
	$F = (0,1) = f_1$	$\mathcal{F}_1 = [f_1]$
$\mathbf{e}_1 = (1)$	$E = (1,1) = f_0 + f_1$	$\mathcal{F} = [f] = [f_0 + f_1]$
$\mathbf{x} = (\ (OXE)\ )$	$(PQX) := \overline{PX}/\overline{XQ}$	(Teilungsverhältnis)
(Doppelverhältnis)		$\mathcal{X} = [1, (OF; XE)]$
$(PQ; XY) := (PQX)/(PQY)$		$(PF; XY) = \lim\limits_{Q \to F} (PQ; XY)$

---

affine Abbildung:

$\mathbf{o} \mapsto \mathbf{o}' = (a),\ \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1' = (b)$ $\qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

$\mathbf{x} = (x) \mapsto (\ (b-a)x + a\ ) \qquad X \mapsto AX \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b-a \end{pmatrix}$

$$x = \lambda^0 o + \lambda^1 e_1 \mapsto \lambda^0 o' + \lambda^1 e_1' \ (\ \lambda(Ax) = A(\lambda x)\ )$$

(λ^0, λ^1) homogene affine Koordinaten $\lambda^0 + \lambda^1 = 1$ *oder*

λ^1/λ^0 Teilungsverhältnis $(\lambda^0, \lambda^1) \sim (\lambda\lambda^0, \lambda\lambda^1)$

$(OE_1X) = (O'E_1'X')$ ist invariant

projektive Abbildung:

$\mathcal{F}_i = [f_i'], \mathcal{F} = [f']$ $\mathcal{F}_0 \mapsto \mathcal{F}_0',\ \mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{F}_1',\ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}'$

$A = (\alpha_0 f_0', \alpha_1 f_1')$ *mit* $f' = \alpha_0 f_0' + \alpha_1 f_1'$

$$\mathcal{X} = [X] \mapsto [AX]$$

$$[x_0, x_1] \mapsto [\alpha_0 x_0 f_0' + \alpha_1 x_1 f_1']$$

projektiv ist $A \sim \lambda A$

$X = (x_0, x_1) = \lambda^0 f_0 + \lambda^1 f_1 \mapsto \lambda^0 f_0' + \lambda^1 f_1'$ *aber:*

λ^0 und λ^1 hängen von den Repräsentanten f_i ab *(und von (x_0, x_1))*

$\Rightarrow$ Teilungsverhältnis nicht invariant

Für zwei Punkte $X = (x_0, x_1) = \lambda^0 f_0 + \lambda^1 f_1$

$Y = (y_0, y_1) = \mu^0 f_0 + \mu^1 f_1$

ist $(\lambda_i) : (\mu_i)$

von den Repräsentanten f_i unabhängig

und bis auf Proportionalität auch von den Repräsentanten x und y

daher:

das Doppelverhältnis $(\mathcal{F}_0 F_1; \mathcal{X}, \mathcal{F})$ $:= \ (f_0 f_1 x) : (f_0 f_1 f)$

ist eine projektive Invariante: $= (f_0' f_1' x') : (f_0' f_1' f')$

homogene projektive Koordinaten $(1, \alpha^1)$ $(\alpha, \alpha\alpha^1)$

mit $\alpha^1 = (f_0 f_1; x, f) = (f_0 f_1 x)/(f_0 f_1 f)$