The idea of putting a coordinate grid on a geometric surface for purposes of measurement and location has a long history.
H.L. Resnikoff, R.O. Wells, Jr., Mathematics in civilization

$\mathbb{E}^d$ *affin*	d-dimensionaler Raum	*projektiv*	$\mathbb{P}^d$
$\mathbb{R}^d$	Standardmodell		$\{U^1 \subset \mathbb{R}^{d+1}\}$
$\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^d$	(metrische) Koordinaten		
	(projektive) Koordinaten		$\mathcal{X} = [1, x_i]$
			$(= [\lambda, \lambda x_i], \lambda \neq 0)$
Einbettung in $\mathbb{R}^{d+1}$	$\{1\} \times \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$		*Repräsentantensystem*
$(1, \mathbf{x})$	(eigentlicher Punkt)		$(1, \mathbf{x}) \in \langle(1, \mathbf{x})\rangle$
Richtung	(Fernpunkt) $(0, \mathbf{x})$		*Repräsentant*

spezielle Punkte:

$\mathbf{o} = (0, \cdots, 0)$ Ursprung $\quad O = (1, \mathbf{o})$

$\mathbf{e}_i$ Einheitsvektoren $\quad E_i = (1, \mathbf{e}_1)$

Grundpunkte $\mathcal{F}_0 = [1, \mathbf{o}], \mathcal{F}_i = [0, \mathbf{e}_i]$

(Koordinatensimplex)

Einheitspunkt $\mathcal{F} = [1, \cdots, 1]$

(Repräsentanten $f_0 = (1, \mathbf{o}), f_i = (0, \mathbf{e}_i), f = (1, \cdots, 1) = \sum f_i$ *)*

---

affine Abbildung:

$\mathbf{o} \mapsto \mathbf{o}', \ \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}'_i$

setze: $\mathbf{a}_i := \mathbf{e}'_i - \mathbf{o}', \mathbf{A} = (\mathbf{a}_i)$ *mit Spalten* $\mathbf{a}_i$

$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{o}'$ $\quad x \mapsto Ax$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}' & \mathbf{A} \end{pmatrix}$

$$x = \lambda^0 o + \sum \lambda^i e_i \mapsto \lambda^0 o' + \sum \lambda^i e'_i$$

daher: *(wegen* $\lambda(Ax) = A(\lambda x)$ *)*

(λ^0, λ^i) Schwerpunktskoordinaten $\lambda_0 + \sum \lambda_i = 1$

oder: homogene affine Koordinaten $\sim (\lambda\lambda^0, \lambda\lambda^i)$

‚Teilungsverhältnis' (oe_i, x) *bei* $\lambda_0 \neq 0 \sim (1, \lambda^i/\lambda_0)$

Der barycentrische Calcul
ein neues Hülfsmittel
zur analytischen Behandlung der Geometrie
dargestellt … angewendet von August Ferdinand Möbius
Leipzig. 1827.

---

projektive Abbildung:

$\mathcal{F}_i \mapsto \mathcal{F}'_i, \ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}'$

$A = (\alpha_i f'_i)$ *(Spalten) mit* $f' = \sum \alpha_i f'_i$ $\qquad f_i \mapsto f'_i, \ f \mapsto f'$

$\mathcal{X} = [x] \mapsto [Ax] \qquad [x_i] \mapsto [\sum \alpha_i x_i f'_i]$

$\mathcal{X} = [x] = \sum \lambda^i f_i \mapsto \sum \lambda^i f'_i$ *aber:*

λ^i hängen von den Repräsentanten f_i (und x) ab

$\Rightarrow$ Schwerpunktkoordinaten *(und Teilungsverhältnis)* nicht invariant

Für zwei Punkte $\quad x = \sum \lambda^i f_i \quad X = [x]$

$y = \sum \mu^i f_i \quad Y = [y]$

ist $\quad (\lambda^i) : (\mu^i) \quad$ (λ^i, μ^i *für* x, y *eindeutig*)

von den Repräsentanten f_i unabhängig

mit $\quad (f_i, x) = (\lambda^i) \quad x = \sum \lambda^i f_i$

und $\quad (f_i, f) = (\mathrm{e}_i) \quad f = \sum \mathrm{e}_i f_i$

ist jedoch das $\quad$ Verhältnis $(\lambda^i) : (\mathrm{e}^i)$

$:=$ Doppelverhältnis $(\mathcal{F}_i; \mathcal{X}, \mathcal{F}) \qquad (f_i, x) : (f_i, f)$

(cross-ratio) $\quad$ eine projektive Invariante: $= \lambda(f'_i, x') : \mathrm{e}(f'_i, f')$

projektive Koordinaten $\qquad (\lambda^i/\mathrm{e}_i) \sim (\alpha\lambda^i/\mathrm{e}_i)$

(Doppelverhältnis, falls $\lambda_0 \neq 0$*)* $\sim (1, \alpha^i)$

falls $f = \sum f_i$ *(d.h.* $\mathrm{e}_i = 1$*)* $\qquad = (1, \lambda^i)$

(ersetze dazu f_i *durch* $\mathrm{e}_i f_i$*)*

---

siehe: Möbius and his band.
Mathematics and Astronomy in Nineteenth-century Germany.
edited by John Fauvel, Raymond Flood, and Robin Wilson.
Oxford, 1993