$P_1P_2P_3$	Dreieck	(*$i+k$ zyklisch modulo* 3)
$Q_i \in (P_{i+1}P_{i+2})$	Punkte auf Seiten	$\lambda^i P_{i+1} + (1-\lambda^i)P_{i+2}$
$\rho_i = (1-\lambda^i)/\lambda^i$	Teilungsverhältnis	$= P_{i+1}Q_i/Q_iP_{i+2}$
$\rho = \rho_1\rho_2\rho_3$	Produkt der Teilungsverhältnisse	*(zyklisch)*

(Satz von Ceva) *(1678)* *(affin)*

P_iQ_i gehen durch einen Punkt $\Leftrightarrow \rho = 1$

(Satz von Menelaos) *(ca. 100 v.Chr.)* *(affin)*

Q_i liegen auf einer Geraden $\Leftrightarrow \rho = -1$

(Satz von Pappus-Pascal) *(projektiv)*

Liegen P_1, P_3, P_5 und $P_2P_4P_6$ jeweils auf einer Geraden,
so liegen die *(drei)* Schnittpunkte
von P_iP_{i+1} und $P_{i+3}P_{i+4}$
auf einer Geraden.

(vollständiges Viereck) *(projektiv)*

Vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 bestimmen
sechs Gerade (P_iP_j).
Diese sechs Gerade bestimmen drei Schnittpunkte
von (P_iP_j) und (P_rP_s) *(i, j, r, s paarweise verschieden).*
Sei A auf (P_1P_2) und (P_3P_4), *(Schnittpunkt)*
und B auf (P_2P_3) und (P_4P_1), *(Schnittpunkt)*
seien ferner C und D
die Schnittpunkte von (AB) mit (P_1P_3) und (P_2P_4):

$\Rightarrow$

Die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten sind nicht kollinear.

(Satz) *(oBdA., zwei weitere analoge Fälle)*

Die Punkte A, B und C, D liegen harmonisch.

Beweise (bzw. Beweisskizzen)

(Ceva) Zu P_i und S

seien Q_i die Schnittpunkte von (Q_iS) mit $(P_{i+1}P_{i+2})$.

Aus $S = \sum \sigma_i P_i$ *(Schwerpunktkoordinaten eindeutig)*

folgt $Q_i = (\sigma_{i+1}P_{i+1} + \sigma_{i+2}P_{i+2})/(1-\sigma_i) \;\Rightarrow\; \rho_i = \sigma_{i+2}/\sigma_{i+1}$

(Menelaos) Zu P_i und Q_1, Q_3

sei Q_2 der Schnittpunkt von (P_1P_3) und (Q_1Q_3).

Aus $Q_2 = \sigma_1 P_1 + \sigma_2 P_2 + \sigma_3 Q_1$ folgt

$$P_3 = (\sigma_2 P_2 + \sigma_3 Q_1)/(1-\sigma_1) \;\Rightarrow\; \rho_1 = -(1-\sigma_1)/\sigma_2$$

$$\textit{und } Q_2 = (1-\sigma_1)P_3 + \sigma_1 P_1 \;\Rightarrow\; \rho_2 = \sigma_1/(1-\sigma_1)$$

$$\rho_3 = \sigma_2/\sigma_1$$

(Pappus-Pascal) Projektive Transformation auf den Spezialfall

$$P_1P_2 \parallel P_4P_5 \textit{ und } P_2P_3 \parallel P_5P_6$$

(Strahlensatz: S Schnittpunkt von $(P_1P_3P_5)$ und $(P_2P_4P_6)$)

$$\Rightarrow\; SP_1 : SP_5 = SP_2 : SP_4 \textit{ und } SP_5 : SP_3 = SP_6 : SP_2$$

(also auch) $\Rightarrow\; SP_1 : SP_3 = SP_6 : SP_4$

$$\Rightarrow\; P_3P_4 \parallel P_6P_1,$$

d.h. die Schnittpunkte liegen auf der Ferngeraden

(vollständiges Viereck) Projektive Transformation

auf einfachen Spezialfall. (*z.B.* P_i bilden Quadrat)