V_1, V_2, W Vektorräume (über K)

$\varphi : V_1 \times V_2 \to W$ heißt **bilinear** (bezüglich K)

$:\Leftrightarrow$ $\varphi(\lambda v_1 + v_1', v_2) = \lambda\varphi(v_1, v_2) + (v_1', v_2)$

und $\varphi(v_1, \lambda v_2 + v_2') = \lambda\varphi(v_1, v_2) + (v_1, v_2')$

$(\forall v_1, v_1' \in V_1, v_2, v_2' \in V_2, \lambda \in K)$

d.h., φ ist linear in jeder der beiden Variablen

$V_i, i = 1, \dots, n, W$ Vektorräume (über K)

$\varphi : \prod_{i=1}^n V_i \to W$ heißt **multilinear** (bezüglich K)

$:\Leftrightarrow$ $\varphi_{(v_1,\dots,v_{i-1},\cdot,v_{i+1},\dots,v_n)}(v_i) : V_i \to W$ $(i = 1, \dots, n)$

definiert durch $v_i \in V_i \mapsto \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$

für alle *(fixen)* $v_j \in V_j,\ j \neq i$

eine lineare Funktion ist.

Man schreibt auch: $\varphi \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; W)$

$$\varphi_{(v_1,\dots,v_{i-1},\cdot,v_{i+1},\dots,v_n)}(v_i) = \varphi(v_1, \dots, v_n)\Big|_{v_i} = \big(f(v_1, \dots, v_n)\big)_{v_i}$$

Bilinearform $\varphi : V \times W \to K$ $\quad \dim V = m,\ \dim W = n$ (über K)

Basis $B = \{b_i \mid i = 1, \dots, m\}$ *von* V $\qquad V \ni v = \sum_{i=1}^m v_i b_i$

Basis $C = \{c_j \mid j = 1, \dots, n\}$ *von* W $\qquad W \ni w = \sum_{j=1}^n w_j c_j$

---

es ist $\varphi(v, w) =$

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^m v_i b_i, w\Big) = \sum_{i=1}^m v_i \varphi(b_i, w) =$$

$$= \sum_{i=1}^m v_i \varphi\Big(b_i, \sum_{j=1}^n w_j c_j\Big) = \sum_{i=1}^m v_i \Big(\sum_{j=1}^n w_j \varphi(b_i, c_j)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi(b_i, c_j) v_i w_j$$

mit $[\varphi]_{B,C} \coloneqq (\varphi(b_i, c_j)) \in \mathrm{M}_{m,n}$

wird $\varphi(v, w) = [v]_B^t [\varphi]_{B,C} [w]_C$

($[v]_B^t$ *ist* $[v]_B$ transponiert)

$$\big\{\varphi_{ij} \;\big|\; \varphi_{ij}(v, w) \coloneqq b_i^*(v) c_j^*(w)\big\} \text{ ist Basis von } \mathcal{L}(V, W; K)$$

V Vektorraum (über K), $\dim V = n$ $\qquad v_i \in V,\ (i = 1, \ldots, n)$
Basis $B = \{b_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ von V
(Definition) Die *(eindeutig bestimmte)* schiefsymmetrische multilineare Abbildung

$$\det_B : V^n \to K \text{ mit } \det_B(b_1, \ldots, b_n) = 1 \text{ (Normierung)}$$

heißt Determinante (von n Vektoren bezüglich B)

Die **Determinante** $\det A$ einer quadratischen $(n \times n)$-Matrix A ist die Determinante der n Spaltenvektoren (*oder äquivalent:* Zeilenvektoren) bezüglich der Spalten (*bzw.* Zeilen) der Einheitsmatrix.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) &= 0, \textit{ falls } v_i = \mathrm{o} && \text{für ein } i\\ &= 0, \textit{ falls } v_i = v_j && \text{für zwei } i \neq j\\ &= \det(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n)\\ & \qquad \textit{falls } v_i' = v_i + \textstyle\sum_{j \neq i} \lambda_j v_j\end{aligned}$$

---

(1) explizit:

$$\det(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

(Spezialfall) $n = 3$ (Regel von Sarrus)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ \quad -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{array}$$

(2) rekursiv: Entwicklung nach einer Zeile (oder Spalte)
$\det(v_1, v_2, \ldots, v_n) =$ nach der i-ten Zeile

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

A_{ij} ist jene $((n-1) \times (n-1))$-Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

(3) durch Umformung *bis auf* Diagonalform

$$\det(\ldots, v_i, \ldots) = \det(\ldots, v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j, \ldots)$$

mittels Spalten- und Zeilenoperationen

(4) praktisch: geschickte Kombination von (1)–(3)

$\det(v_1, v_2, \ldots, v_n) =$ wegen Multilinearität $\Rightarrow$

$$= \det(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \det(e_{i_1}, v_2, \ldots, v_n)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \det(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} e_{i_2}, v_3, \ldots, v_n)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \big(\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} \det(e_{i_1}, e_{i_2}, v_3, \ldots, v_n) \big)$$

$$= \ldots = \sum_{i_1, i_2=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \det(e_{i_1}, e_{i_2}, v_3, \ldots, v_n)$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_{n-1} n-1} \det(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-1}}, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n})$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_{n-1} n-1} \big(\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} \det(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) \big)$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-1}}, e_{i_n})$$

wegen $\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0$ *falls* zwei Indices gleich $\Rightarrow$

somit Summe *nur* über alle Permutationen

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \det(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)n})$$

oder äquivalent

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

und schließlich schiefsymmetrisch *und* Normierung $\Rightarrow$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$