O, E_1, E_2, E_3 4 Punkte im *(dreidimensionalen)* Raum

(in allgemeiner Lage = nicht in einer Ebene)

$d+1$ Punkte im d-dimensionalen Raum $O, E_i, i = 1, \dots d$

(Dreibein) *bestimmen ein* Koordinatensystem *(Bezugssystem)*

Ursprung O, Koordinatenachsen OE_i

mit d (linear unabhängigen) Basisvektoren *(Einheitsvektoren)*

$e_1 = OE_1, e_2 = OE_2, e_3 = OE_3$ $e_i = OE_i$

$X = (x_1, x_2, x_3)$ Koordinaten eines Punktes X $X = (x_i)$

durch (Parallel-)Projektion auf die Achsen

eindeutige Darstellung des Vektors $x = OX$

$$x = \sum_i x_i e_i = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Koordinatentransformation Änderung des Bezugssystems

O, E_1, E_2 erstes Koordinatensystem $OX = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

O', E'_1, E'_2 zweites Koordinatensystem $O'X = x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$

Koordinaten des *zweiten* Bezugssystems im *ersten* Koordinatensystem

$O' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, E'_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, E'_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Verschiebungsvektor $a = OO' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und wegen $OE'_i = OO' + O'E'_i$

Basisvektoren $O'E'_1 = b - a =: \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$ und $O'E'_2 = c - a =: \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x = OX = OO' + O'X &= a + (x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2) \\ &= a + x'_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) + x'_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= (a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + a_1)e_1 + (a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_2)e_2 \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + (\, a_1 \quad a_2 \,) \end{aligned}$$

allgemein: *sind* $a = OO'$ und $e'_i = O'E'_i$ $(= E'_i - O')$

die Koordinaten des zweiten Bezugssystems im ersten System

so ist *mit* $A = (e'_i)$ (Spaltenvektoren e'_i)

$$x = OX = Ax' + a$$ *wo*

die Umrechnung *(Transformation)* vom zweiten ins erste System