Auswahlaxiom *(Zermelo)*

Zu jeder Familie nicht-leerer Mengen gibt es eine Auswahlfunktion.

$$\mathcal{S} = \{S_i \neq \varnothing \mid i \in I\} \;\Rightarrow\; (\exists f)\; f : I \to \bigcup_{i\in I} S_i,\; i \mapsto f(i) \in S_i$$

$\Leftrightarrow$ *Das kartesische Produkte nicht-leerer Mengen ist nicht leer.*

Zornsches Lemma *(Lemma von Zorn)*

Hat in einer *(teilweise)* geordneten Menge
jede vollständig geordnete Teilmenge eine obere Schranke,
so hat die Menge *(mindestens)* ein maximales Element.

(Jede induktiv geordnete Menge hat ein maximales Element.)

Wohlordnungssatz *(Zermelo 1904)*

Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

$(\forall M \exists G)\; G \subset M \times M : (M, G)$ Menge mit Wohlordnung

$\rightarrow$ *Methode der transfiniten Induktion*

Jeder Vektorraum hat eine Basis.

(Hamel-Basis)

$\mathbb{R}$ hat als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ eine *(überabzählbare)* Basis.

$\Rightarrow$ In $\mathbb{R}$ gibt unstetige additive Funktionen

(Lösungen der Funktionalgleichung $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(Satz von Steinitz)

Jeder Körper hat eine algebraisch abgeschlossene Hülle.

(maximale Filter)

Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.

(kommutative Ringe mit 1)

Jedes Ideal ist in einem maximalen Ideal enthalten.

(Fortsetzungs-)Satz von Hahn-Banach

In Banachräumen (normierten Vektorräumen) kann jede
auf einem Teilraum definierte stetige lineare Funktion
zu einer auf dem ganzen Raum definierten linearen Funktion
mit gleicher Norm ausgedehnt werden.

$\Leftrightarrow$ *(Trennungs-)Satz von Hahn-Banach*

In Banachräumen können
zwei disjunkte abgeschlossene konvexe Mengen
stets durch eine Hyperebene getrennt werden.

(Maßtheorie) In $\mathbb{R}$ gibt es nicht-meßbare Mengen.

(Paradox von Banach-Tarski)

Die dreidimensionale Einheitskugel
ist *(als Punktmenge)* zerlegungsgleich zu zwei Einheitskugeln.