Wohlordnungsatz $\Rightarrow$ Auswahlaxiom
sei $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ eine Familie nicht-leerer Mengen.
Wohlordnungssatz $\Rightarrow$

auf $S := \bigcup_{i\in I} S_i$ gibt es eine Wohlordnung $(S, \leq)$

$\Rightarrow f : I \to S$, $f(i) := \min S_i$ ist Auswahlfunktion $\blacksquare$

(Graph von f *(mengentheoretisch)* $G_f := \bigcup_{i\in I} \{(i, \min S_i)\}$)

Zornsches Lemma $\Rightarrow$ Wohlordnungsatz
sei S eine Menge (*o.B.d.A.* $S \neq \varnothing$)
sei $\mathcal{U} := \{(U, G_U) \mid U \subset S, G_U \text{ Wohlordnung }\}$

$\mathcal{U} \neq \varnothing$, *denn (z.B.)* $(\{a\}, \{(a, a)\}) \in \mathcal{U}$ $(a \in S)$

mit $(U_1, G_{U_1}) \leq (U_2, G_{U_2}) \Leftrightarrow U_1$ Anfangsstück von U_2

ist $(\mathcal{U}, \leq)$ eine geordnete Menge

bei der jede Kette $\{(U_i, G_{U_i}) \mid i \in I\}$ nach oben beschränkt ist:

denn für $U := \bigcup_{i\in I} U_i$ und $G_U := \bigcup_{i\in I} G_{U_i}$ gilt

$(U_i, G_{U_i}) \leq (U, G_U)$

Zornsches Lemma $\Rightarrow$

in $(\mathcal{U}, \leq)$ gibt es ein maximales (U_m, G_{U_m})

$\Rightarrow U_m = S$, also ist U_m Wohlordnung auf S $\blacksquare$

denn für $s \in S \setminus U_m$

mit $U'_m := U_m \cup \{s\}$ *und* $G_{U'_m} := G_{U_m} \cup U'_m \times \{s\}$)

$\Rightarrow (U_m, G_{U_m}) < (U'_m, G_{U'_m})$

Auswahlaxiom $\Rightarrow$ Zornsches Lemma
sei $(S, \leq)$ eine geordnete Menge,
in der jede Kette nach oben beschränkt ist

sei $\mathcal{C} := \{C \mid C \subset S, (C, \leq) \text{ Kette }\}$

und $S_C := \begin{cases} \{s \mid a < s, \forall a \in S_C\} & \exists \text{ strikte obere Schranke} \\ \{\max S_C\} & \nexists \text{ strikte obere Schranke} \end{cases}$

Auswahlaxiom $\Rightarrow$ (*lt.Vs.:* $S_C \neq \varnothing$)

Auswahlfunktion $\alpha : \mathcal{C} \to S$, $\alpha(C) \in S_C$

betrachte $\mathcal{W}_\alpha := \{W \mid W\ \alpha\text{-Kette }\} \subset \mathcal{C}$

wobei $W \in \mathcal{C}$ α-Kette $\Leftrightarrow W$ wohlgeordnet und $\alpha(W(a)) = a$

für jeden Abschnitt $W(a) := \{b \mid b < a, b \in W\}$ $(a \in A)$

es gilt: $\mathcal{W}_\alpha \neq \varnothing$ *weil* $\{\alpha(\varnothing)\} \in \mathcal{W}_\alpha$

und für $W, W' \in \mathcal{W}_\alpha$:

$W = W'$ oder $W = W'(a')$ oder $W' = W(a)$

$\Rightarrow W_0 := \bigcup \{W \mid W \in \mathcal{W}_\alpha\} \in \mathcal{W}_\alpha$ und $\alpha(W_0)$ maximal in S $\blacksquare$

denn wegen $W_0 \cup \{\alpha(W_0)\} \in \mathcal{W}_\alpha \ \Rightarrow\ \alpha(W_0) \in W_0$