*In the beginning, everything was void,*
*and J. H. W. H. Conway began to create numbers.*
*Donald E. Knuth, Surreal numbers, 1974.*

*gleich viel?* Bijektion *wieviel?* Ordnung

natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ *natural numbers*

positive natürliche Zahlen $\mathbb{N}^+ \coloneqq \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Monoide $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}^+, \cdot)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ wohlgeordnet *(verträglich)*

*axiomatisch* (Peano-Axiome)

$$0 \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ n' \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N}) 0 \neq n',\ n' = m' \ \Rightarrow\ n = m$$

$$(0 \in N, n \in N \ \Rightarrow\ n' \in N) \ \Rightarrow\ N = \mathbb{N} \text{ (Induktion)}$$

*Äquivalenzklassen* $n =$ Klasse aller Mengen mit $n$ Elementen

Modell *(als Menge)* *zugleich:* Repräsentantensystem!

$0 \coloneqq \phi, n+1 \coloneqq n \cup \{n\}$ *ergibt* $n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$

Nachfolgermenge $\nu(S) \coloneqq S \cup \{S\}$ *(definiert für jede Menge)*

$M$ **Turm** $\Leftrightarrow\ \phi \in M,\ S \in M \ \Rightarrow\ \nu(S) \in M$

*dann:* $\mathbb{N} \coloneqq$ „der kleinste Turm“ *(Durchschnitt aller Türme)*

*es gilt* $n \leq m \ \Leftrightarrow\ n \subset m$ $(\ \nu(n) = n + 1\ )$

*Definition:* $n + 0 \coloneqq n,\ n + \nu(m) \coloneqq \nu(n + m)$ *(rekursiv)*

$$n \cdot 0 \coloneqq 0,\ n \cdot \nu(m) \coloneqq n \cdot m + n$$

---

Erweitern von $\mathbb{N}$ $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *( Lösen von $n + x = m$ )*

ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ *integer, integer (whole) number*

*(Schule)* $\mathbb{Z} \coloneqq \{+, -\} \times \mathbb{N}$

*mit* $n = +n$, $0 = +0 = -0$ *und* $(-n) \cdot (-m) \coloneqq n \cdot m$ *etc.*

*„Quotientenbildung“* ( Monoid $\to$ Gruppe )

$\mathbb{Z} \coloneqq (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\equiv$ *mit* $(n, m) \equiv (n', m') \ \Leftrightarrow\ n + m' = n' + m$

---

Erweitern von $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *( Lösen von $n \cdot x = m$ )*

rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ (**Quotientenkörper**) *rational numbers*

*alternativ:* $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$