Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht,
alles andere ist Menschenwerk.
Leopold Kronecker
Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes,
sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge
leichter und schärfer aufzufassen.
Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* 1887

---

natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ *natural numbers*

positive natürliche Zahlen $\mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Monoide $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}^+, \cdot)$ $(\mathbb{N}, \leq)$ wohlgeordnet *(verträglich)*

Erweitern von $\mathbb{N}$ $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *(Lösen von $n + x = m$)*

ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ *integer, integer (whole) number*

(Schule) $\mathbb{Z} \coloneqq \{+, -\} \times \mathbb{N}$

mit $n = +n$, $0 = +0 = -0$ *und* $(-n) \cdot (-m) \coloneqq n \cdot m$ *etc.*

Quotientenbildung (Monoid $\to$ Gruppe)

$\mathbb{Z} \coloneqq (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\equiv$ *mit* $(n, m) \equiv (n', m') \coloneqq n + m' = n' + m$

analog: $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q}^+$ *(Lösen von $n \cdot x = m$)*

$\mathbb{Q}^+ \coloneqq (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\equiv$ *mit* $(n, m) \equiv (n', m') \coloneqq n \cdot m' = n' \cdot m$

(allgemeiner)

Erweitern von $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *(Lösen von $n \cdot x = m$)*

rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ (Quotientenkörper) *rational numbers*

Jeder Integritätsbereich (mit Eins) kann *(auf genau eine Art)*
zu einem (kleinsten) Körper
(Quotientenkörper) erweitert werden.

R Integritätsbereich (mit 1) *(notwendig: nullteilerfrei!)*

(F Körper) $R \subset F \;\Rightarrow\; Q = \langle R \rangle$

$Q = \bigcap \{G, R \subset G \subset F\}$ *(G Unterkörper)*

Unterkörper Q von R in F erzeugt

Konstruktion von Q *(allgemein: nicht Teil eines Körpers!)*

Motivation: $(r, s) \;\leftrightarrow\; sx = r \; (s \neq 0)$ *(eindeutige) Lösung*

($s(x - x') = r - r$) $sx = 0 \; (s \neq 0) \;\Rightarrow\; x = 0$ $\Leftrightarrow$ *nullteilerfrei*

$sx = r$ und $(ts)x = (tr)$ *gleiche Lösung*

$R \times (R \setminus \{0\})$ $(r, s) + (r', s') \coloneqq (rs' + r's, ss')$ *(Brüche!)*

$(r, s)(r', s') \coloneqq (rr', ss')$ *(fast Ring)*

Kongruenzrelation auf $R \times (R \setminus \{0\})$ *($N = \{(0, s), s \in R\}$)*

$(r, s) \equiv (r', s') \quad :\Leftrightarrow \quad rs' = r's$ $(s \neq 0)$

Quotientenkörper $Q \coloneqq R \times (R \setminus \{0\})/\equiv$ *($R \times (R \setminus \{0\})/N$)*

(Einbettung von R) *(Isomorphismus $R \to \iota(R)$)*

$$\begin{array}{cccc} \iota : & R & \to & Q \\ & r & \mapsto & (r, 1) \end{array}$$

(Charakterisierung)

Jede Einbettung $\mu : R \to F$ *(μ injektiv, F Körper)*

kann zu einer Einbettung $\varphi : Q \to F$ *(eindeutig)*

erweitert werden: $\varphi \circ \iota = \mu, \; \varphi(Q) = \langle R \rangle$

Beispiele: $\mathbb{Z} \;\to\; \mathbb{Q}$ rationale Zahlen

$(a \in \mathbb{N})$ $\mathbb{Z}(\sqrt{a}) \;\to\; \mathbb{Q}(\sqrt{a})$ *(quadratische Zahlkörper)*

speziell: $\mathbb{Z}(\sqrt{-1}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) \subset \mathbb{C}$

Polynomfunktionen $\to$ rationale Funktionen