Viele Wege führen nach Rom. (Sprichwort)

algebraisch vollständiger Körper:

Lösen von Gleichungen $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}(\alpha_i) \to \mathbb{A}$ algebraische Zahlen

$Q[x]$ (rationale Polynome) $m \in Q[x]\ ,\ m(\alpha) = 0$ (p irreduzibel)

$p, q \in Q[x]$ $p \equiv q \ \Leftrightarrow\ p(x) = q(x) + a(x)m(x)$

$Q(\alpha) := Q[x]/\equiv$ (Polynome modulo $m(x)$)

topologisch vollständiger Körper *(Metrik)*

Berechnen von Grenzwerten $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *Kombination:* $\mathbb{A} \to \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{R}$

---

axiomatisch: *(Charakterisierung)*

$\mathbb{R}$ ist archimedisch geordneter Körper, Charakteristik 0

beschränkte Mengen haben Supremum *(vollständig)*

Modell: Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ (Metrik $d(r, s) = |r - s|$)

$x, y \in S$ Cauchy-Folgen über $\mathbb{Q}$ *(Cantor)*

$$x \sim y :\leftrightarrow\ \lim d(x_i, y_i) = 0$$

(Klassenbildung) $\mathbb{R} := S/\!\sim$ ($\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$)

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}\ ,\ r \in \mathbb{Q} \mapsto \{r_i\} \in S\ ,\ (r_i = r)$$

äqivalent: Intervallschachtelung, Zifferndarstellung, etc.

Dedekindsche Schnitte

(L, R) Schnitt $\leftrightarrow\ L \cup R = \mathbb{Q},\ (\forall l \in L, r \in R)\ l < r$ ($\inf R \notin R$)

$\mathbb{R}$:=Menge der Schnitte ($\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$)

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}\ ,\ r \mapsto (\{x \mid x \le r\}, \{x \mid x > r\})$$

Nonstandard *(reelle, komplexe)* Zahlen nicht-archimedische Körper

$0 < \omega < 1/n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ω unendlich klein

Conway-Zahlen *(surreal numbers)*

verallgemeinerte Schnitte, beginnend mit (ϕ, ϕ) *(rekursiv)*

R ist nicht konstruktiv $\to$ berechenbare Zahlen *(Turing-Maschinen)*

(Divisions-)Algebren *(über* $\mathbb{R}$ *)*

Dimension = 1 reelle Zahlen $\mathbb{R}$ geordnet

Dimension = 2 komplexe (Gaußsche) Zahlen(ebene) $\mathbb{C}$ kommutativ

Dimension = 4 Quaternionen *(Hamilton)* assoziativ

$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji$ etc.

Dimension = 8 Oktaven *(Cayley)* alternativ