Zornsches Lemma (schwache Version)
Hat in einer *(teilweise)* geordneten Menge
jede **vollständig geordnete** Teilmenge eine obere Schranke,
so hat die Menge *(mindestens)* ein maximales Element.

Zornsches Lemma (starke Version)
Hat in einer *(teilweise)* geordneten Menge
jede **wohlgeordnete** Teilmenge eine obere Schranke,
so hat die Menge *(mindestens)* ein maximales Element.

Zornsches Lemma (schwach)
$\Rightarrow$ Wohlordnungssatz $\Rightarrow$ Auswahlaxiom
$\Rightarrow$ Zornsches Lemma (stark)

(Gödel-Cohen) Das Auswahlaxiom ist **unabhängig**
von ZF (den *Zermelo-Fraenkel*-**Axiomen der Mengenlehre**).

$(M, <)$ geordnet
A Anfangsstück $\Leftrightarrow$ $a \in A$ und $b < a$ impliziert $b \in A$
$M(a) := \{b \mid b < a\} \subset M$ Abschnitt von M

$(M, <)$ wohlgeordnet
A Anfangsstück von $M \Leftrightarrow A = M$ oder $A = M(a)$ *wo* $a = \min(M \setminus A)$
$A \sim B \Leftrightarrow A$ und B sind ordnungsisomorph

Sind M_1 und M_2 wohlgeordnet, so gilt:
$M_1 \sim A_2 \subset M_2$ (A_2 Anfangsstück)
oder $M_2 \sim A_1 \subset M_1$ (A_1 Anfangsstück)
(*und:* A_1 bzw. A_2 sind eindeutig bestimmt)
d.h. Je zwei Ordinalzahlen sind vergleichbar.
(Folgerung) Die *(Klasse der)* Ordinalzahlen ist wohlgeordnet.

Ordinalzahlen *(Repräsentantensystem)* (analog $\mathbb{N}$)
ist kleinste Klasse *mit* $\varnothing$ *und* abgeschlossen *bzgl.*
Nachfolgerbildung $\omega \cup \{\omega\}$ *und* Vereinigung $\bigcup \{\omega_i\}$
es gilt $\omega = \{a \mid a < \omega\}$
und $\omega \le \omega' \Leftrightarrow \omega$ Anfangsstück von ω'

Kardinalzahlen *(Repräsentantensystem)*
(Folgerung) Je zwei Kardinalzahlen sind vergleichbar,
und die *(Klasse der)* Kardinalzahlen ist wohlgeordnet.
Repräsentanten $|S| := \omega$, die kleinste Ordinalzahl mit $|\omega| = |S|$

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0 < \aleph_1 < \cdots$$

(Kontinuumshypothese) $|\aleph_1| = |\mathbb{R}| = \left|2^{\mathbb{N}}\right| = \left|2^{\aleph_0}\right|$
(Gödel-Cohen) *ist* unabhängig von ZFC (d.h., ZF plus Auswahlaxiom).