It's elementary, dear Watson! (Sherlock Holmes)

Theorem: *Every vector space has a basis.*

Proof A: Obvious. *(Consider the linearly independent subsets and apply the Lemma of Zorn.)*

Beweis B:

Die Menge der linear unabhängigen Teilmengen *eines Vektorraums* wird durch die Inklusion $\subset$ induktiv geordnet,
denn die Vereinigung einer Kette linear unabhängiger Mengen *ist ebenfalls* linear unabhängig *und daher* obere Schranke.
Nach dem Zornschen Lemma *gibt es* eine maximale linear unabhängige Menge, *i.e.,* eine Basis.

Beweis C:

Sei V Vektorraum *und* $\mathcal{U} := \{U \subset V \mid U \text{linear unabhängig}\}$
Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ eine Kette *(linear geordnete Menge)* in $(\mathcal{U}, \subset)$.
Dann ist $K = \bigcup \mathcal{K} \in \mathcal{U}$, *(denn* zu jeder endlichen Teilmenge $S \subset K$ *gibt es* ein $U \in \mathcal{K}$ mit $S \subset U$, *also ist* S linear unabhängig,)
und daher obere Schranke von $\mathcal{K}$ *(wegen* $U \subset K$, $\forall U \in \mathcal{K}$*)*.
Somit ist das Zornsche Lemma anwendbar
und es gibt ein maximales Element $B \in \mathcal{U}$.
B *ist* Basis von V, *denn andernfalls gäbe es* ein $b \in V$, das von B linear unabhängig ist,
daher $B \neq B \cup \{b\} \in \mathcal{U}$, *also* B nicht maximal.

Proposition 1: Seien U_i $(i \in I)$ linear unabhängige Teilmengen eines Vektorraums. Gilt für beliebige $i, j \in I$ stets
$S_i \subset S_j$ oder $S_j \subset S_i$, so ist $S := \bigcup_{i \in I} S_i$ linear unabhängig.

Beweis: Seien $v_k \in S$ $(k = 1, \ldots, n)$, $\Rightarrow v_k \in S_{i_k}$ *(für jedes k)*,
$\Rightarrow v_k \in S_0$ (S_0 größte der Mengen S_{i_k}), $\Rightarrow v_k$ linear unabhängig. ■

Proposition 2: Sei V Vektorraum. Es gilt:
B maximale linear unabhängige Menge $\Rightarrow B$ Basis.

Beweis: Sei B maximal, aber der von B erzeugte Teilraum
$\langle B \rangle \neq V \Rightarrow (\exists v) v \in V, v \notin \langle B \rangle \Rightarrow B' := B \cup [v]$ linear unabhängig
$B \subset B', B' \neq B \Rightarrow B$ nicht maximal. *Widerspruch!* ■

Korollar (Beweis D): Die linear unabhängigen Mengen von Vektoren sind (bezüglich $\subset$) induktiv geordnet *(Proposition 1)*
und haben daher ein maximales Element B *(Lemma von Zorn)*.
B ist eine Basis *(Proposition 2)*. ■

prerequisits: vector space, linear independence, basis