Die Geschichte der Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffes ist die Geschichte des zeitlich frühesten Falles der Herausarbeitung und des bewußten Studiums einer axiomatisch fixierten algebraischen Struktur.
Hans Wussing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*
Berlin 1969

Einige Beweise: *(knapp)*

(1) (Links-)Nebenklassen:

$b \in aH \Rightarrow \quad a^{-1}b \in H \Rightarrow a = (bb^{-1})a = b(a^{-1}b)^{-1} \in bH^{-1} = bH$

$b \in aH \Rightarrow bH \subset (aH)H = a(HH) = aH \qquad (\Rightarrow aH = bH)$

(2) Kongruenzrelation:

$$(\forall a, b)\ (aH)(bH) = (ab)H \quad \Leftrightarrow \quad (\forall a)\ aH = Ha$$

$(\Rightarrow) \qquad (aHa^{-1})H = (aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$

$\Rightarrow aHa^{-1} \subset H \Rightarrow aH \subset Ha$

$(\Leftarrow) \qquad (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)(HH) = (ab)H$

(3) $\ker\varphi \lhd G$ $\qquad$ *(setze* $H = \ker\varphi$*)*

$\varphi(aHa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(H)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)\,\{e\}\,\varphi(a^{-1}) = \{\varphi(aa^{-1})\} = \{e\}$

$(\Rightarrow \quad aHa^{-1} \subset \ker\varphi = H)$

---

einige einfache Fakten: $\{e\} \cong \mathbb{Z}_1$

G kommutativ: $\quad H < G \Rightarrow H \lhd G \quad$ *(„trivial“)*

immer: $\quad G \lhd G$ mit $G/G \cong \mathbb{Z}_1 \quad$ *(nur 1 Klasse)*

immer: $\quad \{e\} \lhd G$ mit $G/\{e\} \cong G$

Permutation: $\quad (a \in G)$

$$\begin{array}{rccl} \sigma_a & : & G & \rightarrow & G \\ & & g & \mapsto & \sigma_a(g) := ag \end{array} \qquad \text{injektiv}$$

es gilt: $\quad \sigma_a(\sigma_b(g)) = a(bg) = (ab)g = \sigma_{ab}(g) \qquad \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{ab}$

also: $(n = |G|)$

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & G & \rightarrow & S_n \\ & & g & \mapsto & \varphi(g) := \sigma_g \end{array} \qquad \text{Homomorphismus}$$

Beispiel: (Charakter)

$$\begin{array}{rcccl} \chi & : & \mathbb{R} & \rightarrow & S^1 \subset \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & \exp(\mathrm{i}x) \end{array} \qquad (S^1 \text{ 1-Sphäre})$$

$$\ker\chi = 2\pi\mathbb{Z} \lhd (\mathbb{R}, +)$$

(Projektion)

$$\begin{array}{rcccl} \sigma & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & x \bmod 2\pi \end{array} \qquad \arg\chi(x)\ \text{(Winkel!)}$$