eine Menge ist konvex :⇔ mit je zwei Punkten
gehört auch die Verbindungsstrecke zur Menge

$$M \text{ konvex } \Leftrightarrow (\forall P, Q \in M)\ [PQ] \subset M$$

$$M \text{ sternförmig } \Leftrightarrow (\exists P \in M) : \forall Q\ [PQ] \subset M$$

(M beschränkt) M konvex ⇔ jede Gerade durch inneren Punkt schneidet Rand in genau zwei Punkten

M konvex, P Randpunkt: die Strahlen von P zu den Punkten von M bilden *konvexes* Strahlenbüschel
sie bestimmen den Winkel bei P

daher: in jedem Randpunkt gibt es eine Stütz(hyper)ebene

regulärer Randpunkt :⇔ genau eine Stützebene, gestreckter Winkel

Randpunkt *ist* Ecke (singulärer Punkt) :⇔ mehr als eine Stützebene

strikt konvex :⇔ nur *ein* Randpunkt je Stützebene

Stützebenen paarweise parallel:

Durchmesser: größter Abstand ↔ längste Sehne *(orthogonal)*

Dicke: kleinster Abstand ↔ kürzeste Sehne *(orthogonal)*

Der Durchschnitt konvexer Mengen ist konvex

(*(Trennungs-)***Satz von Hahn-Banach)**

Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen konvexen Mengen
gibt es eine trennende (Hyper-)Ebene
(orthogonal zur Strecke des kürzesten Abstands)

konvexe Hülle :⇔ kleinste konvexe Obermenge

$$\operatorname{conv} S := \bigcap \{C \mid S \subset C \in \mathcal{C}\} \qquad \textit{(ist konvex!)}$$

$$\operatorname{conv} S = \bigcap \{H \mid S \subset H \in \mathcal{H}\}$$

(in Vektorräumen) die Summe konvexer Mengen ist konvex

$$C_1 + C_2 := \{v \mid v = v_1 + v_2, v_i \in C_i\}$$

z.B. Vergrößerung $C + K_r$ von C um r K_r = Kreis mit Radius r

z.B. Parallelepiped *als* Summe von Intervallen

(Minkowski-Geometrie) *(Norm, Metrik)*

(zentralsymmetrische) konvexe Menge $C = -C$ *als* Einheitskugel

$$|x| := \inf \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda C\}$$

Bemerkung: konvexe Mengen sind quadrierbar (haben Jordan-Inhalt)
der Rand konvexer Mengen ist rektifizierbar (hat Länge)
Notation: $\mathcal{C}$ abgeschlossene konvexe Mengen, $\mathcal{H}$ Halbebenen(-räume)

Das geht auf keine Kuhhaut!

(. . . auch wenn das eine andere Geschichte ist)

Welche Figur hat bei gegebenem Umfang die größte Fläche?

oder

Welche Figur hat bei gegebener Fläche den kleinsten Umfang?

formal: $\mathcal{C}(L) \coloneqq \{C \mid C \text{ konvex, Umfang } L\}$

$M(\mathcal{C}(L)) \coloneqq \sup\{F(C) \mid C \in \mathcal{C}(L)\}$ $< \infty$!

gesucht: $C_M \in \mathcal{C}(L)$ mit $F(C_M) = M(\mathcal{C}(L))$ sup *ist* max ?

(heikle Frage) Was *ist* die umschlossene Fläche?

Gibt es die umschlossene Fläche?

(Antwort) **Jordanscher Kurvensatz!**

Beobachtung 1: Eine Lösung muß konvex sein.

Beobachtung 2:

Es genügt, durch einen Durchmesser halbierte Figuren zu betrachten.

Beobachtung 3:

Zu jeder Figur *außer einem Kreis* gibt es

eine Figur mit gleichem Umfang, aber größerer Fläche.

daher:

Wenn es eine Lösung gibt, dann ist diese der Kreis.

da: die Menge $\{F(C) \mid C \in \mathcal{C}(L)\}$ *der Flächeninhalte*

ist beschränkt und abgeschlossen $\Rightarrow$

Der Kreis ist die *(einzige)* Lösung des isoperimetrischen Problems.

(isoperimetrische Ungleichung) $4\pi F \leq L^2$

(Kompaktheitsaussage)

Jede Menge abgeschlossener konvexer Mengen $\{C \mid C \ni P\}$

(um einen Punkt P) mit Umfang L hat einen Häufungspunkt.

Metrik für abgeschlossene konvexe Mengen:

$$d(C_1, C_2) \coloneqq \max_{P_1 \in C_1} d(P_1, C_2) + \max_{P_2 \in C_2} d(P_2, C_1)$$

wobei $d(P, C) \coloneqq \min_{Q \in C} d(P, Q)$

äquivalent dazu: **Hausdorff-Metrik**

$$d_H(C_1, C_2) \coloneqq \max\{\max_{P_1 \in C_1} d(P_1, C_2), \max_{P_2 \in C_2} d(P_2, C_1)\}$$