(P) Satz von Pappus-Pascal *(affiner Spezialfall)*

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ Sechseck mit Ecken *(abwechselnd)*

P_1, P_3, P_5 *und* P_2, P_4, P_6 *kollinear* auf zwei *(Träger-)*Geraden

$P_1P_2 \parallel P_4P_5,\ P_2P_3 \parallel P_5P_6 \ \Rightarrow\ P_3P_4 \parallel P_6Q_1$

zwei Paar Gegenseiten parallel ⇒ drittes Paar parallel

(D) Satz von Desargues *(„Strahlensatz“)*

$P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 (\neq S)$ zwei Dreiecke

SP_iQ_i *kollinear* (P_iQ_i *kopunktal*, S *Zentrum*) in perspektiver Lage

$P_1P_2 \parallel Q_1Q_2,\ P_2P_3 \parallel Q_2Q_3 \ \Rightarrow\ P_3P_1 \parallel Q_3Q_1$

zwei Paar Seiten parallel ⇒ drittes Paar parallel

(S) Scherensatz

$P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ zwei Vierecke

P_1, P_3, Q_1, Q_3 *und* P_2, P_4, Q_2, Q_4 *kollinear* Ecken *(abwechselnd)*

($P_i, Q_i \neq$*Schnittpunkt*) auf zwei Geraden

$P_1P_2 \parallel Q_1Q_2,\ P_2P_3 \parallel Q_2Q_3,\ P_3P_4 \parallel Q_3Q_4 \ \Rightarrow\ P_4P_1 \parallel Q_4Q_1$

drei Paar Seiten parallel ⇒ viertes Paar parallel

(d) kleiner Satz von Desargues *(„Translation“)*

$P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ zwei Dreiecke

P_iQ_i *parallel* *(S Fernpunkt: Parallelprojektion)*

$P_1P_2 \parallel Q_1Q_2,\ P_2P_3 \parallel Q_2Q_3 \ \Rightarrow\ P_3P_1 \parallel Q_3Q_1$

(p) kleiner Satz von Pappus *Spezialfall* von (P)

P_1, P_3, P_5 *und* P_2, P_4, P_6 *kollinear* Ecken *(abwechselnd)*

$P_1P_3P_5 \parallel P_2P_4P_6$ auf zwei parallelen Geraden

$P_1P_2 \parallel P_4P_5,\ P_2P_3 \parallel P_5P_6 \ \Rightarrow\ P_3P_4 \parallel P_6Q_1$

(s) kleiner Scherensatz *Spezialfall* von (S)

P_1, P_3, Q_1, Q_3 *und* P_2, P_4, Q_2, Q_4 *kollinear* Ecken *(abwechselnd)*

$P_1P_3Q_1Q_3 \parallel P_2P_4Q_2Q_4$ auf zwei parallelen Geraden

$P_1P_2 \parallel Q_1Q_2,\ P_2P_3 \parallel Q_2Q_3,\ P_3P_4 \parallel Q_3Q_4 \ \Rightarrow\ P_4P_1 \parallel Q_4Q_1$

P ⇒ (D ↔ S) ⇒ d ⇒ p ⇒ s

pappussche Ebene (: ↔ P) ⇒ desarguessche Ebene (: ↔ D)

⇒ Translationsebene (↔ d)

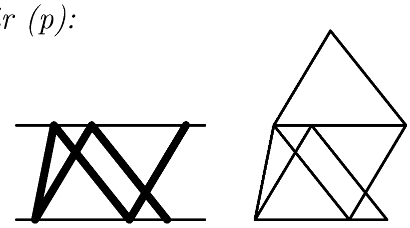
(Satz)

kleiner Satz von Desargues $\Rightarrow$ kleiner Satz von Pappus

---

Beweis:

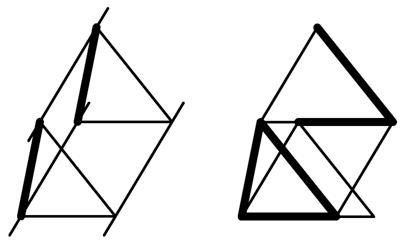
Voraussetzungen für (p):
$g \parallel h$
$A, B', C \in g$
$C', B, A' \in h$
$AB \parallel A'B'$
$BC \parallel B'C'$



Hilfspunkt und -linien:
$AB'' \parallel BC$
$CB'' \parallel BA$

1. Schritt:
(d) $\Rightarrow$

$A'C \parallel B'B''$

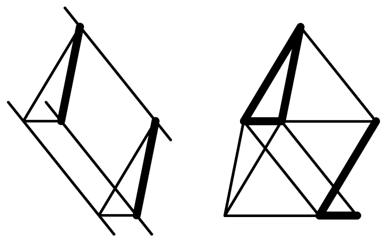


(d) für:

$A'BB'$
und $B'CB''$

2. Schritt:
(d) $\Rightarrow$

$B'B'' \parallel C'A$

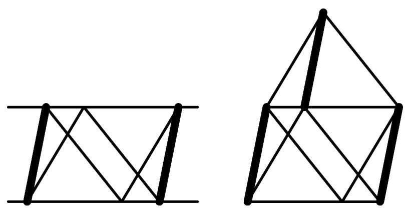


(d) für:

$B'CB''$
und $C'BA$

(1) und (2) $\Rightarrow$

$A'C \parallel AC'$
i.e., Behauptung
von (p) $\blacksquare$



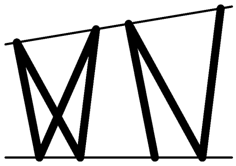
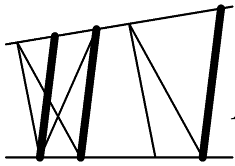
$A'C \parallel B'B''$
$B'B'' \parallel C'A$
qed.

Satz von Pappus-Pascal $\Rightarrow$ Scherensatz
kleiner Satz von Pappus-Pascal $\Rightarrow$ kleiner Scherensatz

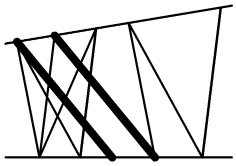
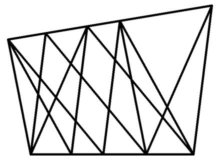
Voraussetzungen für (S):

Hilfslinien und -punkte

$A, C, A', C' \in g$
$B, D, B', D' \in h$
$AB \parallel A'B'$
$BC \parallel B'C'$
$CD \parallel C'D'$

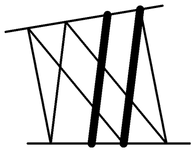
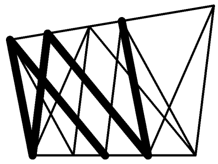
$X \in h$
$AX \parallel CD \parallel C'D'$

$Y \in g$
$YB \parallel XA'$

1. Schritt:
(P) $\Rightarrow$

$AX \parallel YB'$
$\Rightarrow\ CD \parallel YB'$

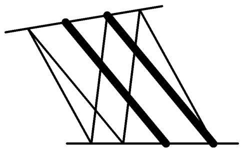
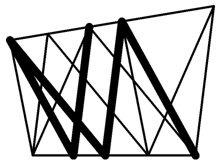



(P) für:

$YB \parallel XA'$
$BA \parallel A'B'$
$YBAXA'B'$

2. Schritt:
(P) $\Rightarrow$

$BY \parallel DC'$
$\Rightarrow\ DC' \parallel XA'$

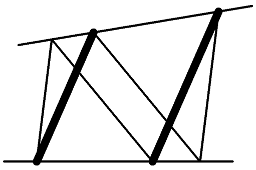
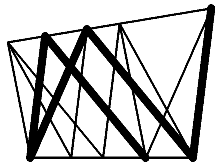



(P) für:

$DC \parallel YB'$
$CB \parallel B'C'$
$DCBYB'C'$

3. Schritt:
(P) $\Rightarrow$

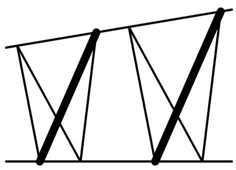
$AD \parallel A'D'$

(P) für:

$A'X \parallel DC'$
$XA \parallel C'D'$
$A'XADC'D'$

$\Rightarrow$ *Behauptung von (S)* ∎



$AD \parallel A'D$
qed.

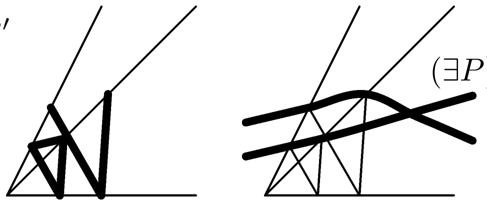
Scherensatz $\Rightarrow$ Satz von Desargues

(Beweis:)

Voraussetzungen für (D):

falls

$S \in AA',\ S \in BB'$
$S \in CC'$
$AB \parallel A'B'$
$BC \parallel B'C'$

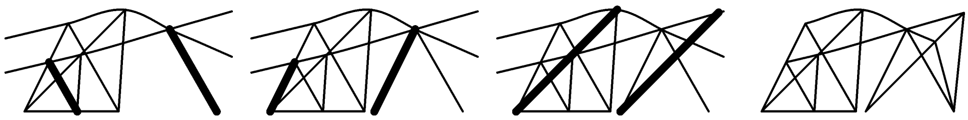


$(\exists P) P \in AC \cap A'C'$
$P \neq A$
$P \neq C$

1. Fall: $A'' := P \notin BB'$

Hilfslinien und -punkte:

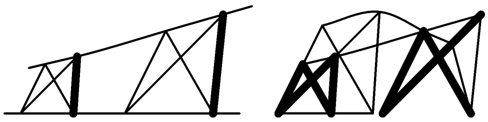
(a) $B'' \in SB,\ A''B'' \parallel AB$, *(b)* $S' \in SB,\ A''S' \parallel AS$
(c) $C'' \in AC,\ S'C'' \parallel SC,\ C''' = S'C'' \cap A'C'$



(S) für:

1. Schritt:
(S) $\Rightarrow$

$B''C'' \parallel BC$

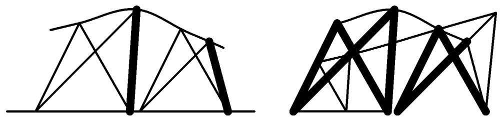


$CSAB$
und
$C''S'A''B''$

(S) für:

2. Schritt:
(S) $\Rightarrow$

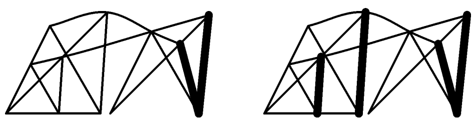
$B''C''' \parallel B'C'$



$C'SA'B'$
und
$C'''S'A''B''$

also:

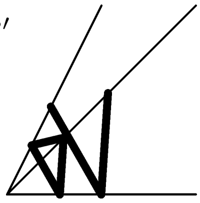
$A''C'' \parallel A''C'''$
$\Rightarrow\ C'' = C'''$
$\Rightarrow\ AC = A'C'$
d.h. $AC \parallel A'C'$

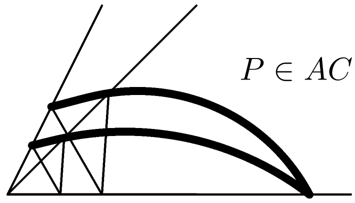


$\Rightarrow\ A''C''$
$= A''C'''$
$= C''C'''$

Voraussetzungen für (D):

$S \in AA'$, $S \in BB'$
$S \in CC'$
$AB \parallel A'B'$
$BC \parallel B'C'$





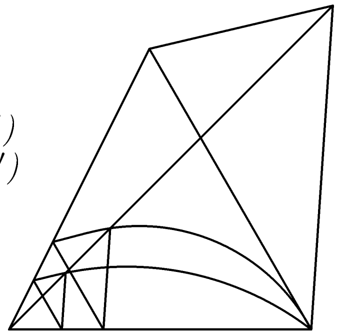
falls

$(\exists P)$
$P \in AC \cap A'C'$
$P \neq A$
$P \neq C$

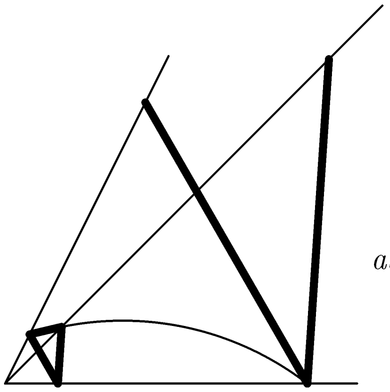
2. Fall: $B'' := P \in BB'$

Hilfslinien und -punkte:

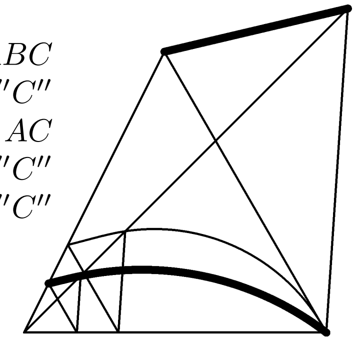
$A'' \in SA$, $A''B'' \parallel AB$ *(also:* $A'' \neq B''$*)*
$C'' \in SC$, $C''B'' \parallel CB$ *(also:* $C'' \neq B''$*)*



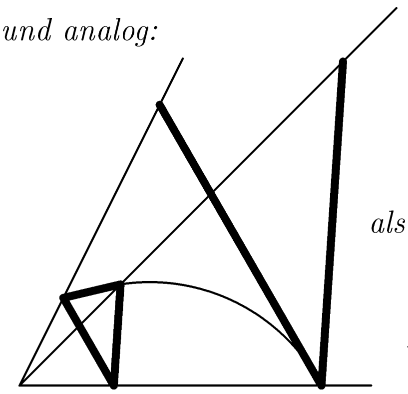
(Anwendung von Fall 1:)



(a) ABC
und $A''B''C''$
$B'' \in AC$
$\Rightarrow B'' \notin A''C''$
also: $AC \parallel A''C''$



und analog:



(b) $A'B'C'$
und $A''B''C''$
$B'' \in A'C'$
$\Rightarrow B'' \notin A''C''$
also: $A'C' \parallel A''C''$

(a) und (b) $\Rightarrow$
$AC = A'C'$

■