$\mathbb{A}^2(K) = K^2$ affine Ebene über Grundkörper K

(allgemeine) affine *(Inzidenz-)*Ebene A_2

Basispunkte der Standard-Koordinaten:

$o = (0,0),\ e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)$ *Koordinatenachsen* k_1, k_2

Basispunkte eines *(allgemeinen)* Koordinatensystems:

O, E_1, E_2 *3 Punkte in allgemeiner Lage* O, E_1, E_2

Achsen $k_1 = OE_1$ *und* $k_2 = OE_2$

Hilbertsche Streckenrechnung

gegeben: X, Y *auf* k $(k := k_1)$

$a : A \in a \parallel k\ (a \neq k)$ *Hilfslinie parallel* k *oBdA.* $A = E_2$

$b : Y \in b \parallel OA \to B \coloneqq b \cap a$ *Parallelogramm* $OYBA$

$c : B \in c \parallel XA \to C \coloneqq c \cap k$ *Parallelogramm* $XCBA$

$C :$ Summe *von* X *und* Y

$X = (0,x), Y = (0,y) \to C = (0, x+y)$

(Längen:) $XC = AB = OY \to OC = OX + XC = OX + OY$

$a : O \in a\ (a \neq k)$ *Hilfslinie durch* O *oBdA.* $a = k_2$

$A : A \in a\ (A \neq O)$ *Hilfspunkt auf* a *oBdA.* $A = E_2$

$b : Y \in b \parallel E_1A \to B := b \cap a$ *Dreieck* OE_1A *ähnlich* OYB

$c : B \in c \parallel XA \to C := c \cap k$ *Dreieck* OXA *ähnlich* OCB

$C :$ Produkt *von* X *und* Y

$X = (0,x), Y = (0,y) \to C = (0, xy)$

(Längen:) $OE_1 : OY = OA : OB = OX : OC$

---

gegeben: P

$a : P \in a \parallel k_2 \to A \coloneqq a \cap k_1$ *Projektion parallel* k_2

$b : P \in b \parallel k_1 \to B \coloneqq b \cap k_2$ *Projektion parallel* k_1

$c : B \in c \parallel E_1E_2 \to C \coloneqq c \cap k_1$ *Dreieck* OCB *ähnlich* OE_1E_2

$P = (A, C)$ Koordinaten *von* P

$P = (x,y) \to A = (0,x),\ C = (0,y)$ *(bezüglich* O, E_1, E_2 *)*

Konstruktionen unabhängig von der Wahl der Hilfspunkte und -linien

affine Abbildungen $O, E_1, E_2 \to O', E_1', E_2'$ sind Isomorphismen

Kollineation

$P \in g \;\Rightarrow\; \alpha P \in \alpha g$ *Automorphismengruppe* $\mathcal{A}$

Spezialfall:

$g \parallel \alpha g$ *(Fernpunkte sind Fixpunkte)*

es gilt: $g \ni P, \alpha P \;\Rightarrow\; \alpha g = g$ *(Fixgerade)*

daher: $\alpha P = P,\; g \ni P \;\Rightarrow\; \alpha g = g$ *(Fixgerade)*

(1. Fall: kein Fixpunkt)

Translation τ

$(\forall P)\; \tau P \neq P$ *kein (eigentlicher) Fixpunkt*

es gilt: $(\exists h)\; g = \tau g \;\Leftrightarrow\; g \parallel h$ *Schar von parallelen Fixgeraden*

(2. Fall: genau ein Fixpunkt)

Streckung *(Dilatation)* δ

$(\exists S)\; \delta S = S$ Zentrum von δ *ein (einziger) Fixpunkt*

es gilt: $g = \delta g \;\Leftrightarrow\; g \ni S$ *Büschel von Fixgeraden*

(3. Fall: mindestens zwei Fixpunkte)

Identität ι

(gilt als) Translation und Streckung

$P \neq Q,\; \iota P = P,\; \iota Q = Q$ *(mehr als)* zwei *(eigentliche)* Fixpunkte

$\Rightarrow\; (\forall R) \iota R = R$ $\rightarrow$ jeder Punkt ist Fixpunkt

denn: $R \notin PQ \;\Rightarrow\; \iota(PR) = PR,\; \iota(QR) = QR$

$\Rightarrow\; \iota R = \iota(PR \cap QR) = PR \cap QR = R$

und $S \in PQ \;\Rightarrow\; \iota(SR) = SR$

$\Rightarrow\; \iota S = \iota(PQ \cap SR) = PQ \cap SR = S$

Translationsgruppe $\mathcal{T}$ *alle* Translationen

(Untergruppe) $\mathcal{T}_g$ Translationen mit $\tau g = g$

Streckungsgruppe $\mathcal{D}_S$ *(mit Zentrum S)* Streckungen mit $\delta S = S$

$S \in g$ $\mathcal{T}_g \leftrightarrow$ additive algebraische Struktur

$(S \neq E \in g)$ $\mathcal{D}_S \leftrightarrow$ multiplikative algebraische Struktur

$\tau_A \in \mathcal{T}_g$ *mit* $\tau S = A$ $\leftrightarrow$ $\tau_A X = X + A$

$\delta_B \in \mathcal{D}_S$ *mit* $\delta E = B$ $\leftrightarrow$ $\delta_B X = B \cdot X$

Hilfsmittel:

geometrisch | *algebraisch-geometrisch* | *algebraisch*

Automorphismen(gruppen)

Schließungssätze | Koordinaten(struktur)

allgemeine affine Ebene | Ternärkörper

Basis O, E_1, E_2 | ternäre Operation | $T(X, Y, Z)$

(Streckenrechnung) | $= X \cdot Y + Z$

$T(X, Y, Z) := (X \cdot Y) + Z$ | *mit* $X \cdot Y := T(X, Y, O)$

und $X + Y := T(X, E_1, Y)$

viele Zwischenschritte: | Loop, Doppelloop, kartesische Gruppe, etc.

(p) kleiner Pappus | *Streckenaddition* $+$ *kommutativ*

(d) kleiner Desargues | *(Veblen-Wedderburn-System)*

Translationsebene:

$\mathcal{T}$ transitiv: *zu* P *und* Q *gibt es* $\tau P = Q$

(D) Desargues | Streckungen linear transitiv | Schiefkörper

zu P *und* Q *und* $S \in PQ$ *gibt es* $\delta P = Q$ | $(\delta \in \mathcal{D}_S)$

Achsenaffinitäten linear transitiv

Affinitäten transitiv auf Dreiecken

(P) Pappus-Pascal | Körper

Streckenmultiplikation $\cdot$ *kommutativ*

(Satz) | $\Leftarrow$ | *(Satz von Wedderburn)*

Jede endliche desarguessche Ebene ist pappussch. | Jeder endliche Schiefkörper ist kommutativ, *d.h.* Körper

---

Achsenaffinität: *Gerade von Fixpunkten* (Achse)

Affinität: Produkt von Achsenaffinitäten

(für Koordinatenschiefkörper:)

Affinitäten: $\alpha X = \lambda X + P$ *mit* λ linear

Kollineationen: $\alpha X = \lambda X + P$ *mit* λ semilinear

---

$\phi : V \to V'$ semilinear $:\Leftrightarrow$ $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$

(wobei ϱ Isomorphismus des Grundkörpers) $\phi(\lambda v) = \varrho(\lambda)\phi(v)$