Beginnend mit der etwas vagen Vorstellung von Symmetrie als Harmonie der Proportionen ...
Hermann Weyl, *Symmetrie* (Vorwort, p.7)
(ins Deutsche übersetzt von Lulu Bechtolsheim, Basel 1955)

Symmetrie von geometrischen Figuren/Körpern *(figure,body)*

Was ist ein Polygon/Polyeder/Körper*?*

(polygon, polytope, polyhedron)

geometrisch/topologisch: Teilmenge des Raums E^d ($\mathbb{R}^d$)

(*inklusive/exklusive* Inneres / Rand)

abstrakt/kombinatorisch Ecken, Kanten, Seiten und deren Inzidenz

konvexer Polyeder $\leftrightarrow$ konvexe Hülle der Ecken

oder: $\leftrightarrow$ Schnitt von Halbräumen

z.B. d-dimensionaler Würfel $\leftrightarrow$ 2^d Ecken $\leftrightarrow$ $2d$ Halbräume

(wichtig für Komplexität von Algorithmen)

Symmetrie Invarianz gegenüber gewissen Abbildungen

Symmetrieabbildungen *meist:* Bewegungen (Isometrien)

allgemeiner: Ähnlichkeitsabbildungen, etc.

Symmetriegruppe *(einer Figur)*: $\leftrightarrow$ Fixgruppe der Figur

enthält: alle Symmetrieabbildungen, die die Figur invariant lassen

(„auf sich abbilden")

Polygon (n-gon) Drehungen und Spiegelungen

$\delta = 2\pi/n$ kleinste Drehung *(orientierungstreu)*

$C_n = \left\{\delta^k \,\middle|\, 0 \leq k \leq n-1\right\}$ zyklische Gruppe *(Ordnung n)*

$\varepsilon = \delta^0 = \delta^n$ neutrales Element

σ Spiegelung

$D_n = C_n \cup \sigma C_n$ Dieder-Gruppe ($C^n \lhd D^n$)

Die Symmetriegruppe einer beschränkten Figur
besteht aus Drehungen und *(eventuell)* Drehspiegelungen
mit einem gemeinsamen Fixpunkt (Drehzentrum).

Beweis (Ebene): $\mathcal{S}(C)$ Symmetriegruppe von C

$(\exists b)$ $(\forall x)\ x \in M \ \Rightarrow\ |x| < b$ $M \subset \mathbb{R}^d$ *beschränkt*

Translation τ $(\exists N)\ \left|\tau^N(x)\right| > b$ $\Rightarrow\ \tau \notin \mathcal{S}(C)$

Ebene: Drehungen δ_P und δ_Q (Drehzentren P und Q)

$P \neq Q$ $\Rightarrow\ \delta_P \cdot \delta_Q \cdot \delta_P^{-1} \cdot \delta_Q^{-1}$ Translation $\Rightarrow\ P = Q$

Drehspiegelung $\sigma_P \ \Rightarrow\ \sigma_P^2 = \delta_P$ (Drehung) (Drehzentrum P)

Spiegelung σ, δ Drehung um $P \Rightarrow \sigma^{-1} \cdot \delta \cdot \sigma$ Drehung um $\sigma^{-1}(P)$

$\Rightarrow\ P = \sigma^{-1}(P) \ \Rightarrow\ P$ auf Spiegelachse

---

(Ebene) $\mathcal{S}(C)$ diskret $\Rightarrow \mathcal{O}(X)$ *diskret* $\Rightarrow$ *endlich*

$\exists X' \in \mathcal{O}(X)$ $0 \neq \alpha = \angle X'PX$ minimal

(P gemeinsames Drehzentrum)

$\delta_{\beta,P} \in \mathcal{S}(C)$ $\Rightarrow\ k\alpha \leq \beta < (k+1)\alpha$

also: $X'' := \delta_{\beta,P}^{-1}\delta_{\alpha,P}^{k+1} \in \mathcal{O}(X)$ *mit* $0 \leq \angle X''PX < \alpha$

$\Rightarrow\ X'' = X$ $\Rightarrow\ \beta = k\alpha$

$C_n = \langle \delta_{\alpha,P} \rangle$ zyklische Gruppe der Ordnung n $n = 2\pi/\alpha$

$\Rightarrow \mathcal{S}(C) \cong C_n$ *oder* $\mathcal{S}(C) \cong C_n \cup \sigma C_n \cong D_n$

Produkt *(Zusammensetzung)* von Drehungen:

Dreieck ABC $\alpha = \angle CAB,\ \beta = \angle ABC,\ \gamma = \angle BCA$

$\Rightarrow\ \delta_{2\gamma,C} \cdot \delta_{2\beta,B} \cdot \delta_{2\alpha,A}$ *ist die* Identität

denn: *(mit Spiegelungen σ an den Dreiecksseiten)*

$$\delta_{2\gamma,C} \cdot \delta_{2\beta,B} \cdot \delta_{2\alpha,A} = (\sigma_{CA} \cdot \sigma_{BC}) \cdot (\sigma_{BC} \cdot \sigma_{AB}) \cdot (\sigma_{AB} \cdot \sigma_{CA})$$
$$= \sigma_{CA} \cdot (\sigma_{BC} \cdot \sigma_{BC}) \cdot (\sigma_{AB} \cdot \sigma_{AB}) \cdot \sigma_{CA} = \varepsilon$$

Korollar:

$\delta_{\alpha,A}$, $\delta_{\beta,B}$ Drehungen (Drehwinkel α, β, Drehzentren A, B)

$\Rightarrow\ \delta_{\beta,B} \cdot \delta_{\alpha,A} = \delta_{-\gamma,C}$

wobei ABC Dreieck *mit* $\alpha/2 = \angle CAB,\ \beta/2 = \angle ABC,\ \gamma/2 = \angle BCA$

(auch nichteuklidisch: elliptisch, hyperbolisch!)