Friese		**Prismen**
Translationen *senkrecht* g		Drehungen *um* g
Translation *um* t	*erzeugt von:* τ (minimal)	*um* $\delta = 2\pi/n$
Zentrum S *auf* h	*(zweizählige)* Drehung δ	Achse S ($\perp g$) *in* h
an Achse m ($\parallel g$)	Spiegelung σ ($\parallel g$)	*an* Ebene m ($\ni g$)
an h	Spiegelung μ *und* Gleitspiegelungen ($\perp g$)	*an* h
	minimale Gleitspiegelung γ: $\gamma^2 = \tau$ *oder* $\gamma^2 = \tau^2$	
	n gerade $\to$ Inversion	$\delta^{n/2}\mu$ ($n\delta/2 = \pi$)
(*um* $\tau^k S$)	konjugierte Drehungen $\tau^k\delta\tau^{-k}$	(*um* $\tau^k S$)
$\tau\delta = \delta\tau =: \delta'$ *ergibt:*		(*um* (Winkel-)Mitte S' *von* S *und* τS)
(*um* $\tau^k S'$)	konjugierte Drehungen $\tau^k\delta'\tau^{-k}$	(*um* $\tau^k S'$)
(*an* $\tau^k\mu$)	konjugierte Spiegelungen $\tau^k\mu\ t^{-k}$	(*um* $\tau^k\mu$)
$\tau\mu = \mu\tau =: \mu'$ *ergibt:*		(*an* (Winkel-)Halbierender m' *von* m *und* τm)
(*an* $\tau^k m'$)	konjugierte Spiegelungen $\tau^k\mu'\tau^{-k}$	(*um* $\tau^k m'$)

$\langle\tau\rangle$ Translationsgruppe T

$\langle\gamma\rangle = T \cup \gamma T$ $\quad(\tau = \gamma^2)$

$\langle\tau,\gamma\rangle = T \cup \gamma T = T \cup \mu T = \langle\tau,\mu\rangle$ $\quad(\tau^2 = \gamma^2 \;\Leftrightarrow\; \gamma = \tau\mu = \mu\tau)$

$\langle\tau,\sigma\rangle = T \cup \sigma T = T \cup \sigma' T = \langle\tau,\sigma'\rangle$

$\langle\tau,\delta\rangle = T \cup \delta T = T \cup \delta' T = \langle\tau,\delta'\rangle$

$\langle\tau,\delta,\sigma\rangle = \langle\gamma,\delta\rangle = \langle\gamma,\sigma\rangle = T \cup \gamma T \cup \delta T \cup \sigma T$ $\quad(\gamma^2 = \tau, S \notin m)$

$\langle\tau,\delta,\sigma\rangle = \langle\tau,\delta,\mu\rangle = \langle\tau,\sigma,\mu\rangle = T \cup \delta T \cup \sigma T \cup \mu T$ $\quad(\tau^2 = \gamma^2, S \in m)$

$= \langle\tau,\delta,\gamma\rangle = \langle\tau,\sigma,\gamma\rangle = T \cup \delta T \cup \sigma T \cup \gamma T$ $\quad(\gamma = \tau\mu)$

---

keine Punktspiegelung (Drehung):

$\lfloor\ \ \lfloor\ \ \lfloor\ \ \lfloor\ \ \lfloor$	C_n	**keine** Spiegelung
$\lfloor\lceil\ \lfloor\lceil\ \lfloor\lceil\ \lfloor\lceil\ \lfloor\lceil$	S_{2n}	**Gleit**spiegelung
$\supset\ \ \supset\ \ \supset\ \ \supset\ \ \supset$	C_{nh}	**parallele** Spiegelachse
$\cup\ \ \cup\ \ \cup\ \ \cup\ \ \cup$	C_{nv}	**senkrechte** Spiegelachsen

mit Punktspiegelung (Drehung):

$\cup\cap\ \ \cup\cap\ \ \cup\cap\ \ \cup\cap\ \ \cup\cap$	D_n	**keine** Spiegelung
$\cup\ \cap\ \cup\ \cap\ \cup\ \cap\ \cup\ \cap\ \cup\ \cap$	D_{nv}	**senkrechte** Spiegelachsen
$\overset{\cup}{\cap}\ \ \overset{\cup}{\cap}\ \ \overset{\cup}{\cap}\ \ \overset{\cup}{\cap}\ \ \overset{\cup}{\cap}$	D_{nh}	**parallele** Spiegelachse

Symmetry is to the geometry of polyhedra
what number theory is to arithmetic.
A. Badoureau, 1881
(zitiert nach: Peter R. Cromwell, Polyhedra. Cambridge 1997.)

---

diskrete Drehgruppen im Raum — 17 Typen

Fixgerade *(Drehachse) g („vertikal“)*

C_1		asymmetrisch	
C_s		spiegelsymmetrisch	*eine Spiegelebene*
C_i		punktsymmetrisch	*Inversion (Zentrum)*

$(n \geq 2)$

C_n		zyklisch	*1 n-zählige Drehachse (g)*
C_{nv}		*(Pyramide)*	*n Spiegelebenen $\ni g$*
C_{nh}			*1 Spiegelebene $\perp g$*
D_n		dihedral	*n 2-zählige Achsen $\perp g$*
D_{nv}			*n Spiegelebenen $\parallel g$*
D_{nh}			*1 Spiegelebene $\perp g$*
S_{2n}		punktsymmetrisch	*n-zählige Achse*

T		Tetraeder-Drehgruppe	
T_v	(auch: T_d)	Tetraeder-Gruppe	*Spiegelebenen $\ni g$*
T_h			*Spiegelebene $\perp g$*
O		Oktaeder-Drehgruppe	
O_h		Oktaeder-Gruppe	*Spiegelebenen*
I		Ikosaeder-Drehgruppe	
I_h		Ikosaeder-Gruppe	*Spiegelebenen*

$S(C)$ Symmetriegruppe S (*beschränktes* C)

$\Rightarrow$ *nur* Drehungen *und* Spiegelungen

$S_0(C)$ Drehungen *in* S

($S = S_0$ *oder* $S = S_0 \cup \sigma S_0$)

$|S_0(C)| = n$ diskret $\Leftrightarrow$ *endlich viele* Drehachsen

d_i k_i-zählige Drehachse $D = \{d_i\}$

wähle $P \notin d_i$ $(\forall i)$ *passend* $\Rightarrow$ $|S_0(P)| = n$ (Spur *von* P)

$D = \bigcup_s D_s$ Zerlegung in Klassen D_s

konjugierte k_s-zählige Achsen $\leftrightarrow$ konjugierte Dreh(unter)gruppen

$|D_s| = n/k_s$ (*je* k_s Elemente von $S(P)$ *je Achse*!)

$\sum \frac{n}{k_s}(k_s - 1) = 2(n-1)$ *denn:*

(i) jedes $s \in S$ ($\neq$Identität) hat *genau eine* Achse

(ii) jede Achse kommt *zweimal* (Orientierung!) vor

$\Rightarrow$ $\sum n(1 - \frac{1}{k_s}) = 2n - 2 \ \leftrightarrow\ \sum(1 - \frac{1}{k_s}) = 2 - \frac{2}{n}$

$n \geq 1,\ k_s \geq 2\ \Rightarrow$ $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{k_s} < 1,\ 0 \leq 2 - \frac{2}{n} < 2$

(**a**) $S_0 = C_1$ $n = 1, |D| = 0$

oder: zwei oder drei Summanden

$(1 - \frac{1}{k_1}) + (1 - \frac{1}{k_2}) = (2 - \frac{2}{n})\ \leftrightarrow\ \frac{n}{k_1} + \frac{n}{k_2} = 2$ $\frac{n}{k_1}, \frac{n}{k_2}$ *ganz*

(**b**) $S_0 = C_n$ $2 \leq n = k_1 = k_2$

$(1 - \frac{1}{k_1}) + (1 - \frac{1}{k_2}) + (1 - \frac{1}{k_3}) = (2 - \frac{2}{n})$ $n, k_1, k_2, k_3 \geq 2$

daher: nicht alle $k_i \geq 3 \Rightarrow$ *(o.B.d.A.)* $k_3 = 2$

$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}$ $(k_1, k_2, 2)$

(**c**) $S_0 = D_{\frac{n}{2}}$ $n = 2k \geq 2,\ (k, 2, 2)$

(**d**) $S_0 = T$ $n = 12,\ (3, 3, 2)$

(**e**) $S_0 = O$ $n = 24,\ (4, 3, 2)$

(**f**) $S_0 = I$ $n = 60,\ (5, 3, 2)$