komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$

$z = x + \mathrm{i}y = r\exp(\mathrm{i}\varphi) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ *(Euler)*

Betrag $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Argument $\varphi = \arg z = \arctan(y/x)$

$$z_1 z_2 = r_1\exp(\mathrm{i}\varphi_1) r_2 \exp(\mathrm{i}\varphi_2) = r_1 r_2 \exp(\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2))$$

(geometrisch) Produkt der Beträge, Summe der Argumente

$z \mapsto z + z_0$ Translation *(um z_0)*

$z \mapsto z_0 z$ Drehstreckung *(mit Zentrum 0)*

Streckung um $|z_0|$ und Drehung um $\arg(z_0)$

$z \mapsto 1/\overline{z}$ Inversion *(am Einheitskreis $|z| = 1$)*

$z \mapsto 1/z$ Inversion und Spiegelung *(an reeller Achse)*

(erzeugt von: $z + z_0$, $z_0 z$, $1/z$)

$z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ Möbius-Transformation $(ad - bc \neq 0)$

konform (winkeltreu)

läßt Doppelverhältnis unverändert

Doppelverhältnis: $(a, b; x, y) := \dfrac{x-a}{x-b}\dfrac{y-b}{y-a}$

reell $\leftrightarrow$ vier Punkte auf Kreis (*oder:* Gerade)

(entspricht:) $[z_0, z_1] \mapsto [dz_0 + cz_1, bz_0 + az_1]$ *(über $\mathbb{C}$)*

projektive Abbildung der projektiven Geraden

$\{z \mid |z| < 1\}$ *(offener Einheitskreis)*

hyperbolische Ebene

(Poincaré) Gerade $\leftrightarrow$ Kreisbogen

(orthogonal zu Einheitskreis)

Metrik $\leftrightarrow$ Logarithmus des Doppelverhältnisses

(mit den idealen Punkten)

orientierungstreue Bewegungen *(Isometrien)* der hyperbolischen Ebene

$\leftrightarrow$ Möbius-Transformationen *mit:* Einheitskreis $\mapsto$ Einheitskreis

Spiegelung *(an Gerade)* $\leftrightarrow$ Inversion *(an Kreisbogen)*

Bewegung $\leftrightarrow$ Produkt von *(bis zu)* drei Spiegelungen *(Inversionen)*

$$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

(komplexe) Riemannsche *(Zahlen-)*Kugel

projektive komplexe Gerade

komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$

stereographische Projektion $\pi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ affine komplexe Gerade

Kreise $\leftrightarrow$ Kreise, Gerade *(in $\mathbb{C}$)* Fernpunkt ∞

Kreis durch ∞ $\leftrightarrow$ Gerade

Kreisverwandtschaft Möbius-Transformation projektive Abbildung

(orientierungserhaltend)

Kreise $\to$ Kreise Doppelverhältnis invariant

a, b, c, d auf Kreis *(auf Kreis, Gerade)* $\leftrightarrow$ $(a, b; c, d) \in \mathbb{R}$

Kreisverwandtschaft *mit* $\infty \mapsto \infty$

(affine) Ähnlichkeitstransformation

Drehung um Polachse	Drehung	$z_0 z$ ($\lvert z_0\rvert = 1$)
Größenänderung	Streckung	$r_0 z$ ($r_0 \in \mathbb{R}$)
Verschiebung	Translation	$z_0 + z$

Spiegelung *(am Mittelpunkt)* Inversion $1/\overline{z}$

Umkippen der Polachse

Inversion und Spiegelung $1/z$

Kreisverwandtschaft *mit* $z_0 \mapsto \infty$

$z_0^{-1} \mapsto$ Pol Gerade $\to$ Kreise *und*

Kreise durch $z_0 \to$ Gerade

(orientierungstreu) $(az + b)/(cz + d)$ *mit* $cz_0 + d = 0$

bzw. $(a\overline{z} + b)/(c\overline{z} + d)$ *mit* $c\overline{z}_0 + d = 0$

Jede Kreisverwandtschaft ist

Produkt von höchstens drei Inversionen.

(entspricht: Spiegelungen)

Dreiecke mit gleichen Winkeln sind kongruent.

Die Winkelsumme im Dreieck ist kleiner π

Defekt $\Delta(ABC) \coloneqq \delta$ $\alpha + \beta + \gamma = 1 - \delta$

$ABC = ADC \cup DBC \;\Rightarrow\; \Delta(ABC) = \Delta(ADC) + \Delta(DBC) \;\Rightarrow$

Der Defekt $\Delta(ABC)$ ist proportional zur Fläche

(Die Fläche von Dreiecken ist beschränkt!)

---

uneigentliche Punkte:

Randpunkte, unendlich ferne Punkte, *ideal points*

Überpunkte, ideale Punkte,*ultra-ideal points*

Schiebung orientierungserhaltend, kein Fixpunkt

Klassifikation: $P \notin g, \; h \ni P$

(a) h schneidet g *(intersecting)*

(b) h überparallel zu g *(ultra-parallel, divergent)*

genau eine gemeinsame Normale, kein Schnittpunkt

(c) zwei Gerade h_1, h_2 sind (rand)parallel zu g

keine gemeinsame Normale, kein Schnittpunkt

(limiting rays, parallel) ein gemeinsamer Randpunkt

äquidistante Kurven:

Der Abstand paralleler Gerade ist nicht konstant:

Die Punkte mit konstantem Abstand liegen *(im Poincaré-Modell)*

auf Kreisbogen durch die Randpunkte der Geraden.

Horozykel: Grenzkurve der Kreise,

die eine Gerade im selben Punkt berühren.

(durch Randpunkt – das ist also keine Gerade!)

Pseudosphäre: *(konstante negative Krümmung)*

isometrisch zu einem Sektor eines Horozykels

(zwischen zwei ‚Durchmessern' durch Randpunkt)

Die *gesamte* nichteuklidische Ebene kann im $\mathbb{R}^3$

nicht isometrisch eingebettet werden. *(Hilbert)*

---

euklidische Kreise im Poincaré-Modell sind:

(a) Kreise der nichteuklidischen Ebene *(anderer Mittelpunkt!)*

(b) Horozykel (ein Randpunkt)

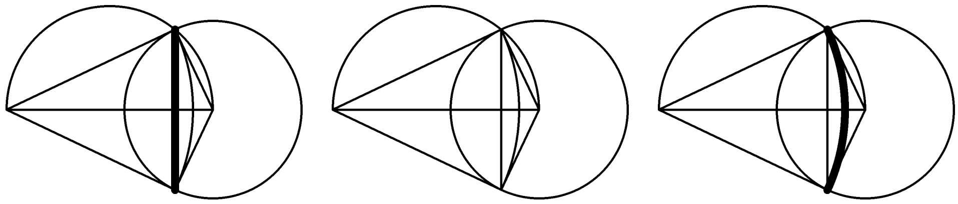
(c) äquidistante Kurven (zwei Randpunkte)

(d) Gerade (zwei Randpunkte, orthogonal) hyperbolische Ebene $:= \{z \mid |z| < 1\}$

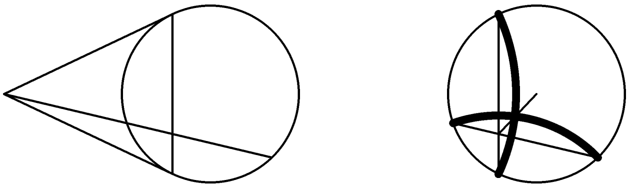
Mittelpunkt $M = 0$ $\qquad P, Q \in k := \{z \mid |z| = 1\}$ *(ideale Punkte)*

Kleinsches Modell **Poincarésches Modell**

Strecke PQ Kreisbogen PQ orthogonal k

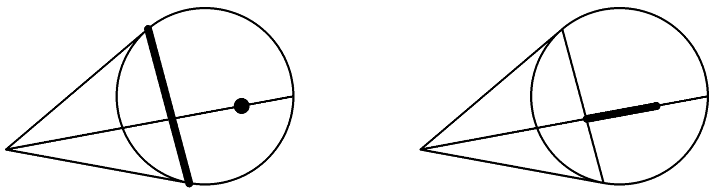


S Mittelpunkt von PQ $\qquad SM \cdot TM = 1$ $\qquad$ Tangenten TP *und* TQ

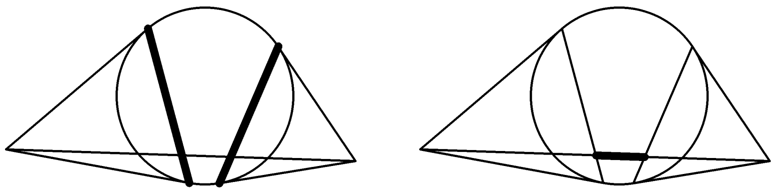


zwei Gerade PQ, $P'Q'$ $\qquad PQ \perp P'Q' \;\leftrightarrow\; TP'Q'$ kollinear

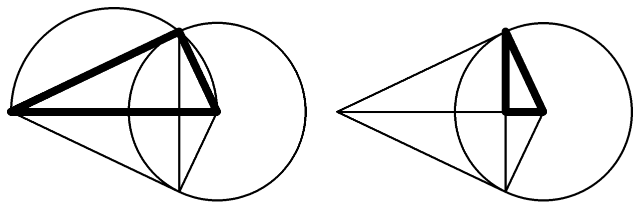
---



Konstruktion des Lots von einem Punkt auf eine Gerade

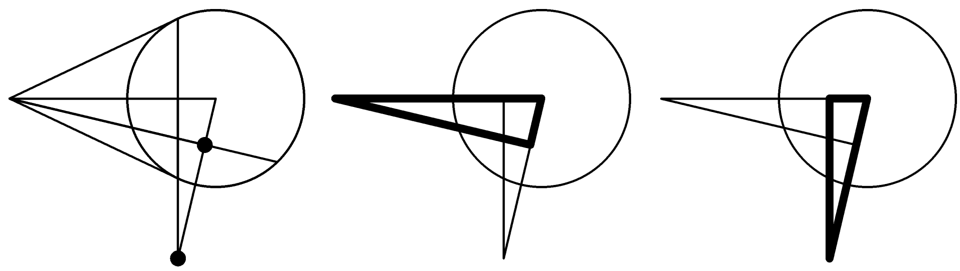


Konstruktion der gemeinsamen Normalen zu zwei Geraden



wegen $PMT \sim SMP$

$MP : MT = MS : MP \;\Rightarrow \qquad MS \cdot MT = MP \cdot MP = 1$



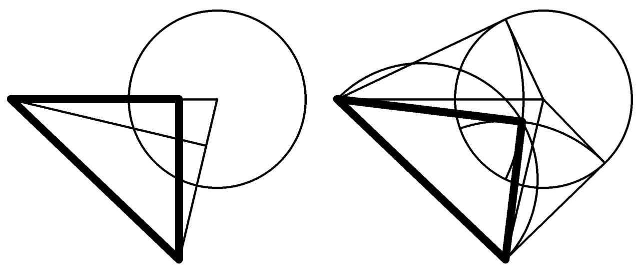
$($*zu* PQ *und* $P'Q' \ni T)$

sei $S' \in P'Q',\ MS' \perp P'Q'$ *(euklidisch)* und $X = MQ' \cap PQ$

wegen $S'MT \sim SMX$

$MS' : MT = MS : MX \;\Rightarrow \qquad MX \cdot MS' = MS \cdot MT = 1$

$($*also:* XP' *und* XQ' Tangenten) $\qquad \Rightarrow$ XT' ■



es ist $\qquad TT'^2 = TS^2 + ST'^2$

$= (MT - MS)^2 + (MT'^2 - MS^2)$

$= (MT^2 - 2 \cdot MT \cdot MS + MS^2) + (M'T'^2 - MS^2)$

$\qquad = MT^2 + MT'^2 - 2$

also *wegen* $PT^2 = MT^2 - 1$ *und* $P'T'^2 = MT'^2 - 1$

$($*da* PT *und* $P'T'$ Tangentenabschnitte) $\qquad = PT^2 + P'T'^2$

$($*i.e.,* Radien *und* Abstand *bilden* rechtwinkeliges Dreieck) ■