*(Definition)* **Helly-Zahl** $H(\mathcal{M})$ *einer Mengenfamilie*

$H(\mathcal{M}) \coloneqq n$ minimial, derart daß:

Haben je $n$ Mengen einen gemeinsamen Punkt,

so ist der Durchschnitt von $\mathcal{M}$ nicht leer.

$$(\forall \{M_i\} \subset \mathcal{M}) \ \bigcap_{i=1}^{n} M_i \neq \varnothing \ \Rightarrow \ \bigcap \mathcal{M} \neq \varnothing$$

**(Satz von Helly)** *Für Familien $\mathcal{M}$ konvexer Mengen im $R^d$ gilt:*

*(1913)* $H(\mathcal{M}) = d + 1$

*falls* (a) $\mathcal{M}$ ist endlich

*oder falls* (b) die Mengen in $\mathcal{M}$ sind kompakt

---

*(Satz von Jung)* *universal cover, („Pferchkreis“)*

Jede Menge der Ebene mit Durchmesser $d$

ist in einem Kreis mit Radius $d/\sqrt{3}$ enthalten.

*(Satz von Blaschke)* Dicke = minimale Breite

Jede konvexe Menge der Ebene mit Dicke $d$

enthält einen Kreis mit Radius $d/3$.

*(Satz von Krasnosielski)* ($M$ beschränkt, eben)

Können je drei Randpunkte von $M$

*zugleich* von einem Punkt aus gesehen werden,

so gibt es einen Punkt, von dem aus

alle Punkte der Menge gesehen werden können.

(*d.h., $M$ ist* sternförmig)

($k$-sets)

Zu jeder endlichen Punktmenge in der Ebene gibt es

einen Punkt $M$, derart daß gilt:

In jeder abgeschlossenen Halbebene, deren Rand durch $M$ geht,

liegt *(mindestens)* ein Drittel der Punkte.

(*d.h.:* auf jeder Seite jeder Geraden durch $M$

liegt *(mehr als)* ein Drittel der Menge *(„ungefähr gleich viel“)*)

**(Satz von Radon)** $d+2$ Punkte im $\mathbb{R}^d$ können stets so in zwei Mengen aufgeteilt werden, daß deren konvexe Hüllen einander schneiden.

*Beweis:* *betrachte* $d+1$ Gleichungen in $d+2$ Unbekannten $\lambda_i$:
$\sum_i \lambda_i P_i = 0, \sum_i \lambda_i = 0$ $\quad M_1 := \{P_i \mid \lambda_i \geq 0\}, \ M_2 := \{P_i \mid \lambda_i < 0\}$

---

*(Radon 1921)* $\mathcal{M}$ Familie konvexer Mengen (in $\mathbb{R}^d$)
$|\mathcal{M}| = d+2 \ \Rightarrow \ H(\mathcal{M}) = d+1$
*sei* $I = \{1, \ldots, d+2\}$ *und* $\mathcal{M} = \{M_i \mid i \in I\}$
*(ferner sei)* $P_i \in \bigcap_{j \neq i} M_j \neq \varnothing$
*(Satz von Radon)* $\Rightarrow \ I = I_1 \cup I_2, I_1 \cap I_2 = \varnothing$
*sodaß* (für die konvexen Hüllen $C(I_1)$ und $C(I_2)$ der $P_i, i \in I_1, I_2$
$$\bigcap \mathcal{M} \supset C(I_1) \cap C(I_2) \neq \varnothing$$
*denn:* $P_i \in M_j$ und $P_j \in M_i$ für $(\forall i \in I_1, j \in I_2)$
*also:* $C(I_1) \subset \bigcap_{j \in I_2} M_j$ *und* $C(I_2) \subset \bigcap_{i \in I_1} M_i$

---

$[\mathcal{M}]$ endlich $\ \Rightarrow \ H(\mathcal{M}) = d+1$ *(vollständige Induktion)*
*denn seien* $M_1, \ldots, M_{n+1}$ $n+1$ Mengen
*betrachte* $M_1, \ldots, M_{n-1}, (M_n \cap M_{n+1})$ $n$ Mengen
*Induktionsvoraussetzung*
$$\Rightarrow \ M_1 \cap \cdots \cap M_{n-1} \cap (M_n \cap M_{n+1}) \neq \varnothing \qquad \blacksquare$$
*denn (Induktionsanfang!):*
$(M_n \cap M_{n+1})$ hat mit jeweils $d$ Mengen $M_i$ nicht-leeren Durchschnitt

---

*(Satz von Jung)*
*betrachte:* die Kreise $(r = d/\sqrt{3})$ um Punkte der Menge
*(Satz von Blaschke)*
*betrachte:* für alle Randpunkte die mit Faktor $2/3$ homothetisch verkleinerten Kopien der Menge
*(Satz von Krasnosielski)*
*betrachte:* durch *(lokale)* Stützgerade bestimmten Halbebenen
($k$-sets) *betrachte:* abgeschlossene Halbebenen, die mehr als zwei Drittel der Punkte enthalten