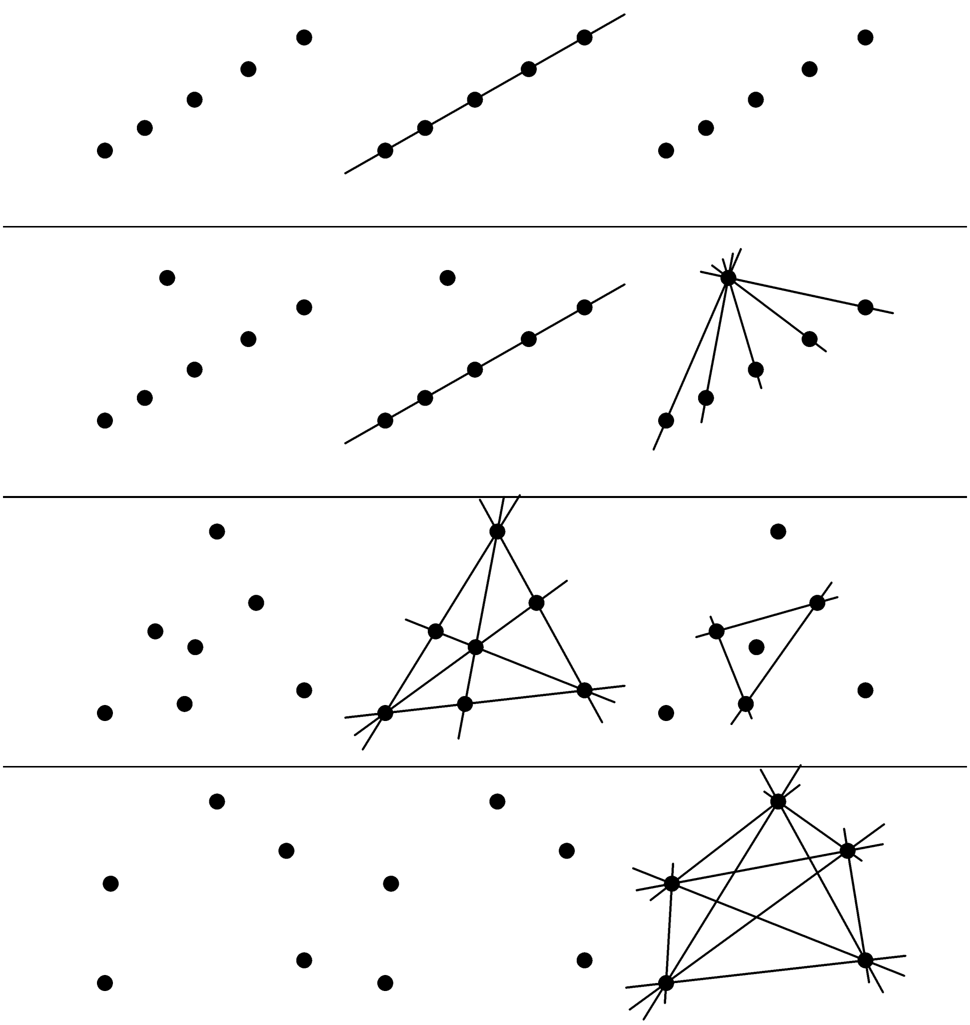
Endlich viele Punkte *(in der Ebene)* bestimmen
endlich viele *(Verbindungs-)*Gerade.

$G = \{g \mid g \ni P, Q \wedge P, Q \in S\}$ $\qquad |S| = n, |G| \leq n(n-1)/2$



Im Normalfall liegen auf jeder Geraden nur zwei Punkte.
Manchmal gibt es spezielle Gerade mit drei oder mehr Punkten.
Außer wenn die Punkte auf einer Geraden liegen,
ist das jedoch nie für alle Gerade der Fall.
Wirklich nie?

Questions for solution.
11851. (Professor Sylvester.)—Prove that it is not possible
to arrange any finite number of real points
so that a right line through every two of them
shall pass through a third,
unless they all lie in the same right line.
The Educational Times (1893).

---

formuliert: J.J. Sylvester (1893),

gelöst: Tibor Gallai (Grünwald) (1933)

Beweis *(L.M. Kelly, 1948)*

Es gibt nur endlich viele Paare (P, g).

Daher gibt es ein Paar (P_0, g_0) mit minimalem Abstand.

$P_0 \in S, g_0 \in G,\ P_0 \notin g_0$ $\qquad d(P_0, g_0)$ minimal

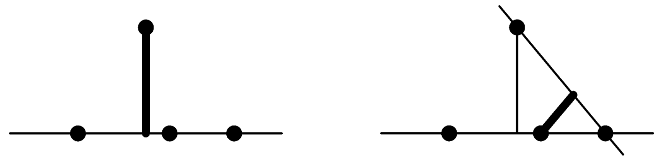
Dann gilt: Auf g liegen nur zwei Punkte. $\qquad |g \cap S| = 2$

Denn: Unter **drei** Punkten auf g

befinden sich stets **zwei** Punkte A und B,

sodaß A näher an der Geraden durch P_0 und B liegt

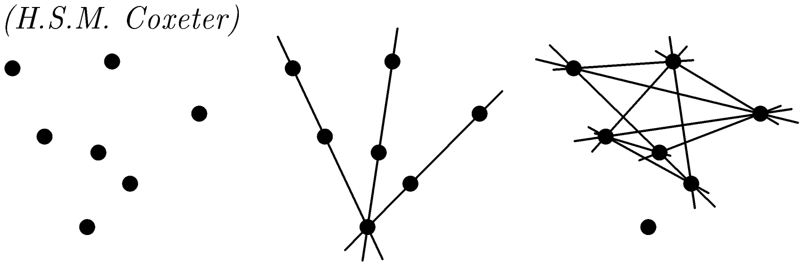
als der Abstand von P_0 zu g_0 ist. **Widerspruch!**



Sei $P_1 \in g_0$, $d(P_0, P_1) = d(P_0, g_0)$ *(Fußpunkt des Lots)*

und A zwischen P_1 und B, $h = (P_0, B) \in G \ \Rightarrow \quad d(P_1, h) < d(P_0, g)$

Beweis *(H.S.M. Coxeter)*

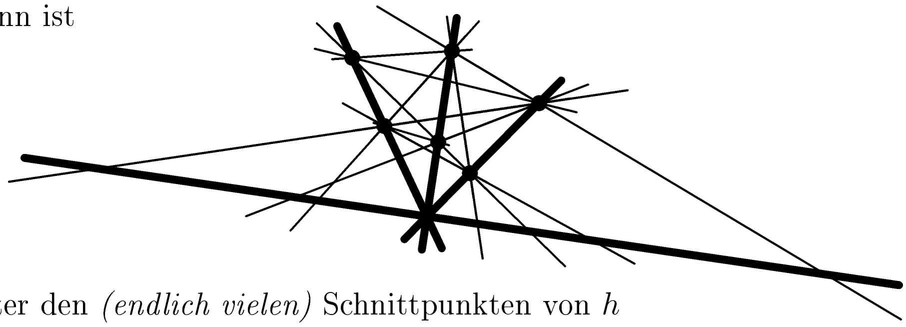


Sei P einer der Punkte. $P \in S$

Sei h eine Gerade durch P, $G_P = \{g \in G \mid g \ni P\}$

auf der kein weiter Punkt liegt. $h \ni P, h \notin G \; (|h \cap S| = 1)$

Dann ist



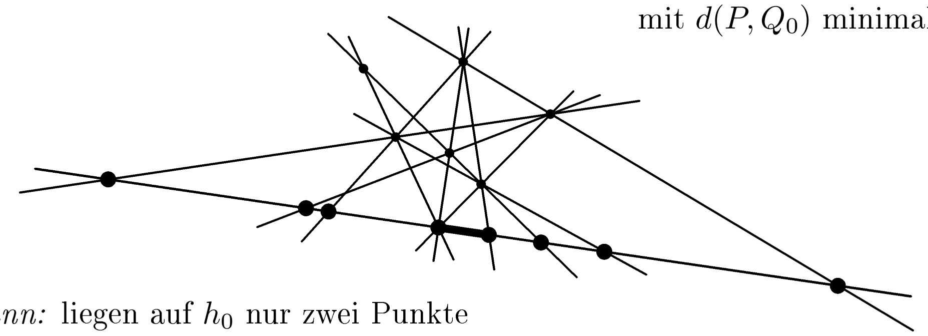
unter den *(endlich vielen)* Schnittpunkten von h

mit den Geraden aus G $T = \{Q = h \cap g \mid g \in G, g \notin G_P\}$

ein Punkt (der zur Geraden h_0 gehört),

der dem Punkt P am nächsten ist. $Q_0 = h_0 \cap g \in T$

mit $d(P, Q_0)$ minimal



dann: liegen auf h_0 nur zwei Punkte

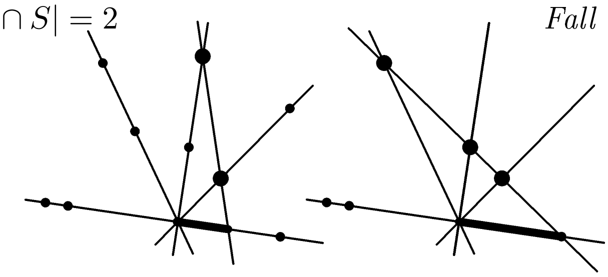
oder: auf einer der Geraden durch P liegen nur zwei Punkte

$|h_0 \cap S| = 2$

oder: $(\exists g \in G_P)\, |g \cap S| = 2$

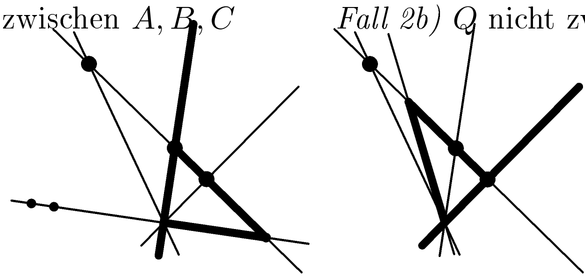
■

Fall 1: $|h_0 \cap S| = 2$ *Fall 2:* $|h_0 \cap S| \geq 3$



Unter drei Punkten auf h_0 $A, B, C \in h_0$,
gibt es einen Punkt A,
sodaß von den beiden anderen Punkten
einer *im* Intervall (A, Q_0) B zwischen A und Q_0
und der andere *außerhalb* liegt. C nicht zwischen A und Q_0

(Fall 2a) Q zwischen A, B, C *Fall 2b)* Q nicht zwischen A, B, C



Dann liegen auf PA nur zwei Punkte $g \ni P, A \;\Rightarrow\; |g \cap S| = 2$
Denn: Jeder weitere Punkt auf PA $Q \in g, Q \neq P, A$
bestimmt eine Gerade, $h_B \ni Q, B, h_C \ni Q, C$
die h **zwischen** P und Q_0 schneidet **Widerspruch!**

■