Very few areas of combinatorics
display such a variety of techniques
from various parts of mathematics.
This should not be seen as a surprise.
Jaroslav Nešetřil, Ramsey Theory
in: Handbook of Combinatorics, 1995

(Dirichletsches) Schubfachprinzip *(pigeon hole principle)*

Verteilt man $n+1$ Dinge auf n Schubfächer,

so kommen in *(mindestens)* ein Fach *(mehr als)* zwei Dinge.

$R(2,\ldots,2;1) = r+1$ $\qquad R(k_i;1) = 1 + \sum_i (k_i - 1)$

(Anwendungsbeispiel) Diophantische Approximation

α irrational, $n \in \mathbb{N}$ $\qquad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq} \leq \frac{1}{q^2}$ $\qquad \exists p, q \in \mathbb{N}, q \leq n$

Betrachte:

n Intervalle $(k-1)/n \leq x < k/n$ $(k = 1, \ldots, n)$

$n+1$ Zahlen $k\alpha \bmod 1$ $(k = 0, \ldots, n)$

Satz von Ramsey *(geometrisch, graphentheoretisch)*

konvexes Polytop mit n Ecken im $\mathbb{R}^d$ $\qquad (n \geq R(k_i;d))$

d Ecken bestimmen $(d-1)$-dimensionalen Simplex

(Facette bzw. verallgemeinerte Diagonale)

Bei jeder Färbung der Simplices *(mit r Farben)*

gibt es ein $(i$-)„monochromes“ Teilpolytop mit k_i Ecken. *(Farbe i)*

(*Fall* $d = 2$: n-eck *(Partyproblem)*, vollständiger Graph)

„In *(hinreichend)* großen Strukturen lassen sich
(gewisse) Teilstrukturen nicht vermeiden.“

N eine Menge mit n Elementen $|N| = n$

N^s Familie der s-elementigen Teilmengen

$N^s := \{S \subset N \mid |S| = s\}$ *es gilt:* $|N^s| = \binom{n}{s}$

$N^s = \bigcup_i F_i^s$ Färbung *(Partition)* von N^s

F_i^s *paarweise disjunkt* *(mit r Farben)* $i = 1, \ldots, r$

(Satz von Ramsey, *1930***)**

Zu jeder Wahl von r, s, k_i gibt es $(i = 1, \ldots, r)$
ein $R < \infty$, derart daß: (**Ramsey-Zahl** $R(k_i; s) := \min R$)
Ist $|N| \geq R$ und $\{F_i^s\}$ eine Färbung von N^s, so gibt es
ein i, und dazu eine Teilmenge $M \subset N$ mit $|M| = k_i$ und $M^s \subset F_i$.
(*d.h.*, die s-elementige Teilmengen von M haben dieselbe Farbe)

Beweis (Induktion): (für $r = 2 : N^s = F_1 \cup F_2$)

(a) $s = 1$ $F_1 \cap F_2 = \varnothing \;\Rightarrow\; |F_1| + |F_2| = \left|N^1\right| = |N|$

also $R(k_1, k_2; 1) = k_1 + k_2 - 1$

(b) $k_1 = s$ *entweder* $(\exists S)\; S \in F_1,\; S^1 = \{S\}, |S| = s = k_1$

oder $F_1 = \varnothing \;\Rightarrow\; F_2 = N^s$

also $R(s, k_2; s) = k_2$ (*und* $R(k_1, s; s) = k_1$)

(c) *Induktionsvoraussetzung:* $R(k_1, k_2; s-1) < \infty \; (\forall k_1, k_2)$

und $K_1 := R(k_1 - 1, k_2; s) < \infty$ *und* $K_2 := R(k_1, k_2 - 1; s) < \infty$

Induktionsschritt: $\Rightarrow\; R(k_1, k_2; s) \leq n := R(K_1, K_2; s-1) + 1 < \infty$

denn: x, F_1, F_2 $x \in N, N' := N \setminus \{x\}$

induzieren Färbung von $S \in {N'}^{s-1}$: $S \in F_i' \;:\Leftrightarrow\; S \cup \{x\} \in F_i$

wenn $|N'| = R(K_1, K_2; s-1)$ $\Rightarrow\; (\exists i, M')\, |M'| = K_i,\; {M'}^{s-1} \subset F_i'$

(oBdA.) $i = 1$ *also wegen* $|M'| = K_1 = R(k_1 - 1, k_2; s) \;\Rightarrow\; (\exists M'')$

wobei entweder $|M''| = k_2,\; {M''}^s \subset F_2$ $\leftrightarrow\; M := M''$

oder $|M''| = k_1 - 1,\; {M''}^s \subset F_1$ $(*)$

da $M'' \subset M'$ $S \subset M'' \;\Rightarrow\; M'' \cup \{x\} \in F_1$ $(**)$

$(*)$ *und* $(**) \Rightarrow$ $(M'' \cup \{x\})^s \subset F_1$ $\leftrightarrow\; M := M'' \cup \{x\}$

(d) $r > 2$ $R(k_1, \ldots, k_r; s) \leq R(R(k_1, k_2; s), k_3, \ldots, k_r; s)$ ■

(van der Waerden *(Baudet's conjecture)*) *Sei* $N = \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{Z}$

Für hinreichend großes $n = n(k, r)$ gibt es
in jeder Partition $N = N_1 \cup \cdots \cup N_r$ eine Menge N_i
die eine arithmetische Folge der Länge k enthält.

(Erdős-Szekeres, 1934)

$E(k)$ Punkte *(in allgemeiner Lage)* in der Ebene
enthalten stets ein *(strikt)* konvexes k-eck.

$E(3) = 3, E(4) = 5, E(5) = 9$ $\quad 2^{k-2} + 1 \leq E(k) \leq R(k, 5; 4)$

denn mit: $F_1 = \{\textit{konvexe Vierecke}\}, F_2 = \{\textit{nicht-konvexe Vierecke}\}$

gilt $|S| \geq 5 \;\Rightarrow\; S^4 \not\subset F_2$

bessere Schranke: $E(k) \leq e(k, k)$

wobei $e(k, l) :=$ minimal, *sodaß* $\exists$

konvexer Bogen der Länge k oder konkaver Bogen der Länge l

$$e(k, l) = e(k-1, l) + e(k, l-1) - 1$$

Idee: $e(k, l-1)$ Endpunkte konvexer $(k-1)$-Bögen
enthalten Anfangspunkt eines konkaven $(l-1)$-Bogens

(Erdős-Szekeres, 1934)

Jede Zahlenfolge der Länge $k^2 + 1$ enthält
eine monotone Teilfolge der Länge $k + 1$.

Beweis (A. Seidenberg, 1959): Folge $a_1, \ldots, a_n$

Setze: $k_i =:$ Länge der längsten monoton wachsenden Folge,

und $l_i =:$ Länge der längsten monoton fallenden Folge,
die bei a_i beginnt

es gilt: (k_i, l_i) paarweise verschieden

denn ist $j < i$ $\quad \Rightarrow\; k_j \geq k_i + 1$ *falls* $a_j \leq a_i$

oder $l_j \geq l_i + 1$ *falls* $a_j \geq a_i$

also: $k_i \leq k, l_i \leq l \;\Rightarrow\; n \leq kl \;\Rightarrow$

optimal! (s.u.) $n \geq kl + 1 \;\Rightarrow\; (\exists i)\; k_i \geq k + 1$ *oder* $l_i \geq l + 1$

$l, l-1, \cdots, 1, 2l, 2l-1, \cdots, l+1, 3l, \cdots, 4l, \cdots, kl, kl-1, \cdots, (k-1)l$