

(Definition) **Helly-Zahl** $H(\mathcal{M})$ einer Mengenfamilie

$H(\mathcal{M}) := n$ minimal, derart daß:

Haben je n Mengen einen gemeinsamen Punkt,

so ist der Durchschnitt von \mathcal{M} nicht leer.

$$(\forall \{M_i\} \subset \mathcal{M}) \bigcap_{i=1}^n M_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap \mathcal{M} \neq \emptyset$$

(Satz von Helly) Für Familien \mathcal{M} konvexer Mengen im \mathbb{R}^d gilt:

(1913) $H(\mathcal{M}) = d + 1$

falls (a) \mathcal{M} ist endlich

oder falls (b) die Mengen in \mathcal{M} sind kompakt

(Satz von Jung) universal cover, („Pferchkreis“)

Jede Menge der Ebene mit Durchmesser d

ist in einem Kreis mit Radius $d/\sqrt{3}$ enthalten.

(Satz von Blaschke) Dicke = minimale Breite

Jede konvexe Menge der Ebene mit Dicke d

enthält einen Kreis mit Radius $d/3$.

(Satz von Krasnosielski) (M beschränkt, eben)

Können je drei Randpunkte von M

zugleich von einem Punkt aus gesehen werden,

so gibt es einen Punkt, von dem aus

alle Punkte der Menge gesehen werden können.

(d.h., M ist sternförmig)

(k -sets)

Zu jeder endlichen Punktmenge in der Ebene gibt es

einen Punkt M , derart daß gilt:

In jeder abgeschlossenen Halbebene, deren Rand durch M geht,

liegt (mindestens) ein Drittel der Punkte.

(d.h.: auf jeder Seite jeder Geraden durch M

liegt (mehr als) ein Drittel der Menge („ungefähr gleich viel“))

(Satz von Radon) $d + 2$ Punkte im \mathbb{R}^d können stets so
in zwei Mengen aufgeteilt werden,
daß deren konvexe Hüllen einander schneiden.

Beweis: betrachte $d + 1$ Gleichungen in $d + 2$ Unbekannten λ_i :
 $\sum_i \lambda_i P_i = 0, \sum_i \lambda_i = 0$ $M_1 := \{P_i \mid \lambda_i \geq 0\}, M_2 := \{P_i \mid \lambda_i < 0\}$

(Radon 1921) \mathcal{M} Familie konvexer Mengen (in \mathbb{R}^d)
 $|\mathcal{M}| = d + 2 \Rightarrow H(\mathcal{M}) = d + 1$
sei $I = \{1, \dots, d + 2\}$ und $\mathcal{M} = \{M_i \mid i \in I\}$

(ferner sei) $P_i \in \bigcap_{j \neq i} M_j \neq \emptyset$

(Satz von Radon) $\Rightarrow I = I_1 \cup I_2, I_1 \cap I_2 = \emptyset$

sodaß (für die konvexen Hüllen $C(I_1)$ und $C(I_2)$ der $P_i, i \in I_1, I_2$)

$$\bigcap \mathcal{M} \supset C(I_1) \cap C(I_2) \neq \emptyset$$

denn: $P_i \in M_j$ und $P_j \in M_i$ für $(\forall i \in I_1, j \in I_2)$

also: $C(I_1) \subset \bigcap_{j \in I_2} M_j$ und $C(I_2) \subset \bigcap_{i \in I_1} M_i$

$[\mathcal{M}]$ endlich $\Rightarrow H(\mathcal{M}) = d + 1$ (vollständige Induktion)

denn seien M_1, \dots, M_{n+1} $n + 1$ Mengen

betrachte $M_1, \dots, M_{n-1}, (M_n \cap M_{n+1})$ n Mengen

Induktionsvoraussetzung

$$\Rightarrow M_1 \cap \dots \cap M_{n-1} \cap (M_n \cap M_{n+1}) \neq \emptyset \quad \blacksquare$$

denn (Induktionsanfang!):

$(M_n \cap M_{n+1})$ hat mit jeweils d Mengen M_i nicht-leeren Durchschnitt

(Satz von Jung)

betrachte: die Kreise ($r = d/\sqrt{3}$) um Punkte der Menge

(Satz von Blaschke)

betrachte: für alle Randpunkte die mit Faktor $2/3$

homothetisch verkleinerten Kopien der Menge

(Satz von Krasnosielski)

betrachte: durch (lokale) Stützgerade bestimmten Halbebenen

(k -sets)

betrachte: abgeschlossene Halbebenen,

die mehr als zwei Drittel der Punkte enthalten

(Trennungs-)Satz von Hahn-Banach

Je zwei

disjunkte (*beschränkte*) konvexe Mengen

können durch eine Hyperebene getrennt werden.

Konstruktion (im \mathbb{R}^d):

Hyperebene orthogonal zum kürzesten Abstand

 $|\mathcal{M}| = d + 2 \Rightarrow H(\mathcal{M}) = d + 1$ Induktion nach d (*Helly 1923*) $d = 2$ drei Intervalle I_k linke Endpunkte a_k , rechte Endpunkte $b_k \Rightarrow a_k \leq b_k$ $d \rightarrow d + 1$ $d + 2$ konvexe Mengen C_1, \dots, C_{d+2} setze $P_k \in D_k := \bigcap_{i \neq k} C_i \neq \emptyset$ angenommen: $D_{d+2} \cap C_{d+2} = \emptyset$ (Hahn-Banach) \Rightarrow trennende Hyperebene H zu D_{d+2} und C_{d+2} wegen $P_k \in D_k \subset C_i \cap C_{d+2}$ ($i \neq k$)und $P_{d+2} \in D_{d+2} \subset C_i$ ($i \neq d+2$)gilt für die Verbindungsstrecken $P_k P_{d+2}$ (C_i konvex!) $C_i \supset P_k P_{d+2} \cap H \neq \emptyset$ ($i \neq k, d+2$)

also gilt für

$$\mathcal{M}' := (\mathcal{M} \setminus \{C_{d+2}\}) \cap H = \{C'_k := C_k \cap H \mid k \neq d+2\}$$

$$|\mathcal{M}'| = d + 1, \bigcap_{i \neq k} C'_i \neq \emptyset$$

und daher (Induktionsannahme):

$$\bigcap \mathcal{M}' = D_{d+2} \cap H \neq \emptyset$$

Widerspruch (H trennend: $H \cap D_{d+2} = \emptyset$) *qed.*■**Satz von Carathéodory**Sei $M \subset \mathbb{R}^d$. Es gilt:Jeder Punkt aus der konvexen Hülle von M ist auchin der konvexen Hülle von (*nur*) $d + 1$ Punkten aus M enthalten.