(Borsuk, 1930)

Wieviele Teile sind erforderlich, um einen (d-dimensionalen) Körper

in Teile kleineren Durchmessers zu zerteilen?

Wir schreiben $B(K) :=$ kleinste (für K) erforderliche Zahl

und $B(d) :=$ kleinste für alle $K \in \mathbb{R}^d$ ausreichende Zahl

(Borsuk, 1930) $B(S^d) = d + 1$ (Kugel)

es ist $B(2) = 3, B(3) = 4$

$B(W^d) = 2$ (Würfel)

Beispiel zeigt $B(d)$ wächst exponentiell

$W^d \coloneqq \{+1,-1\}^d$ *(Ecken eines)* d-dimensionalen Würfels

$x \in W^d$ $|x| = \sqrt{d}$

$$\mathrm{d}(x,y) = |x-y| = 2d - 2\langle x \mid y\rangle$$

also: $\mathrm{d}(x_1,y_1) < \mathrm{d}(x_2,y_2) \;\Leftrightarrow\; \langle x_1 \mid y_1\rangle > \langle x_2 \mid y_2\rangle$

(Gegen-)Beispiel *Wir konstruieren*

$S \subset W^d$ *mit Durchmesser* $\Delta S < \Delta W^d$

eine Schranke $|T| \le N$ falls $\Delta T < \Delta S$

ergibt $B(S) \ge \frac{|S|}{N}$ (Borsuk-Zahl)

Hilfsmenge $V \subset W^n$ $d = \binom{n}{2}$

und eine Einbettung

$$\iota : V \to S \coloneqq \iota(V) \subset W^d,\; x = (x_i) \mapsto \iota(x) \coloneqq (x_{ij}) = (x_i x_j)_{i<j}$$

wegen $2\langle \iota(x) \mid \iota(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle^2 - n$

ist $|\langle x \mid y\rangle|$ in V minimal $\Leftrightarrow$ $\langle \iota(x) \mid \iota(y)\rangle$ in $\iota(V)$ minimal

also $|\langle x \mid y\rangle|$ in V minimal $\Leftrightarrow$ $\mathrm{d}(\iota(x),\iota(y))$ in $\iota(V)$ maximal

Setze $x \in V \subset W^n \;:\Leftrightarrow\; x \in W^n, x_1 = 1, x_i = -1 (i \in I_x)$

für gerade Anzahl $|I|_x$

es gilt

$$|V| = 2^{n-2}$$

$$\iota : V \to W^d \text{ ist injektiv} \qquad (\; x_{1j} = x_j \;)$$

$$\langle x \mid y\rangle \equiv n \bmod 4$$

$$|\langle x \mid y\rangle| < n \text{ für } x \ne y$$

Setzen speziell: $n = 4p-2$

dann: $(x,y \in V)\, \langle x \mid y\rangle \equiv 2 \bmod p \;\Rightarrow\; \langle x \mid y\rangle = \pm 2$

Behauptung: Für Teilmengen $T \subset S$ gilt:

Kommt zwischen Vektoren $x,y \in T$ $(x \ne y)$

das innere Produkt ± 2 nicht vor (*also* $|\langle x \mid y\rangle| > 2$)

so hat T höchstens $N \coloneqq \sum_{i=0}^{n} \binom{n-2}{i}$ Elemente.

Beweis: Durch $f_x(y) \coloneqq \prod_{i=1}^{p-1}(\langle x \mid y\rangle - i)$

wird eine Polynom $f_x : V \to \mathbb{R}$ definiert

Es gilt: $p/f_x(y) \;\Leftrightarrow\; \langle x \mid y\rangle \ne 2, p-2$

also bis auf $x = y$ und $|\langle x \mid y\rangle| = 2$

das heißt: f_x sind linear unabhängige Linearkombinationen

von Monomen $\prod_{k=1}^{K} x_{i_k}$ mit $K \le n-2$

Folgerung: Ist der Durchmesser von $\iota(T) \subset \iota(V)$

kleiner als der von $\iota(V)$, so hat T höchstens N Elemente