Beginnend mit der etwas vagen Vorstellung von
Symmetrie als Harmonie der Proportionen ...
Hermann Weyl, *Symmetrie* (Vorwort, p.7)
(ins Deutsche übersetzt von Lulu Bechtolsheim, Basel 1955)

Symmetrie von geometrischen Figuren/Körpern *(figure,body)*

Was ist ein Polygon/Polyeder/Körper*?*

(polygon, polytope, polyhedron)

geometrisch/topologisch: Teilmenge des Raums E^d ($\mathbb{R}^d$)

(*inklusive/exklusive* Inneres / Rand)

abstrakt/kombinatorisch Ecken, Kanten, Seiten und deren Inzidenz

konvexer Polyeder $\leftrightarrow$ konvexe Hülle der Ecken

oder: $\leftrightarrow$ Schnitt von Halbräumen

z.B. d-dimensionaler Würfel $\leftrightarrow$ 2^d Ecken $\leftrightarrow$ $2d$ Halbräume

(wichtig für Komplexität von Algorithmen)

Symmetrie Invarianz gegenüber gewissen Abbildungen

Symmetrieabbildungen *meist:* Bewegungen (Isometrien)

allgemeiner: Ähnlichkeitsabbildungen, etc.

Symmetriegruppe *(einer Figur)*: $\leftrightarrow$ Fixgruppe der Figur

enthält: alle Symmetrieabbildungen, die die Figur invariant lassen

(„auf sich abbilden")

Polygon (n-gon)	Drehungen und Spiegelungen
$\delta = 2\pi/n$	kleinste Drehung *(orientierungstreu)*
$C_n = \left\{\delta^k \;\middle|\; 0 \le k \le n-1\right\}$	zyklische Gruppe *(Ordnung n)*
$\varepsilon = \delta^0 = \delta^n$	neutrales Element
σ	Spiegelung
$D_n = C_n \cup \sigma C_n$	Dieder-Gruppe ($C^n \triangleleft D^n$)

Die Symmetriegruppe einer beschränkten Figur
besteht aus Drehungen und *(eventuell)* Drehspiegelungen
mit einem gemeinsamen Fixpunkt (Drehzentrum).

Beweis (Ebene): $\mathcal{S}(C)$ Symmetriegruppe von C

$(\exists b)$ $(\forall x)\ x \in M \ \Rightarrow\ |x| < b$ $M \subset \mathbb{R}^d$ *beschränkt*

Translation τ $(\exists N)\ \left|\tau^N(x)\right| > b$ $\Rightarrow\ \tau \notin \mathcal{S}(C)$

Ebene: Drehungen δ_P und δ_Q (Drehzentren P und Q)

$P \neq Q$ $\Rightarrow\ \delta_P \cdot \delta_Q \cdot \delta_P^{-1} \cdot \delta_Q^{-1}$ Translation $\Rightarrow\ P = Q$

Drehspiegelung $\sigma_P\ \Rightarrow\ \sigma_P^2 = \delta_P$ (Drehung) (Drehzentrum P)

Spiegelung σ, δ Drehung um $P \Rightarrow \sigma^{-1} \cdot \delta \cdot \sigma$ Drehung um $\sigma^{-1}(P)$

$\Rightarrow\ P = \sigma^{-1}(P)\ \Rightarrow\ P$ auf Spiegelachse

---

(Ebene) $\mathcal{S}(C)$ diskret $\Rightarrow \mathcal{O}(X)$ *diskret* $\Rightarrow$ *endlich*

$\exists X' \in \mathcal{O}(X)$ $0 \neq \alpha = \angle X'PX$ minimal

(P gemeinsames Drehzentrum)

$\delta_{\beta,P} \in \mathcal{S}(C)$ $\Rightarrow\ k\alpha \leq \beta < (k+1)\alpha$

also: $X'' := \delta_{\beta,P}^{-1}\delta_{\alpha,P}^{k+1} \in \mathcal{O}(X)$ *mit* $0 \leq \angle X''PX < \alpha$

$\Rightarrow\ X'' = X$ $\Rightarrow\ \beta = k\alpha$

$C_n = \langle \delta_{\alpha,P} \rangle$ zyklische Gruppe der Ordnung n $n = 2\pi/\alpha$

$\Rightarrow \mathcal{S}(C) \cong C_n$ *oder* $\mathcal{S}(C) \cong C_n \cup \sigma C_n \cong D_n$

Produkt *(Zusammensetzung)* von Drehungen:

Dreieck ABC $\alpha = \angle CAB,\ \beta = \angle ABC,\ \gamma = \angle BCA$

$\Rightarrow\ \delta_{2\gamma,C} \cdot \delta_{2\beta,B} \cdot \delta_{2\alpha,A}$ *ist die* Identität

denn: *(mit Spiegelungen σ an den Dreiecksseiten)*

$$\delta_{2\gamma,C} \cdot \delta_{2\beta,B} \cdot \delta_{2\alpha,A} = (\sigma_{CA} \cdot \sigma_{BC}) \cdot (\sigma_{BC} \cdot \sigma_{AB}) \cdot (\sigma_{AB} \cdot \sigma_{CA})$$
$$= \sigma_{CA} \cdot (\sigma_{BC} \cdot \sigma_{BC}) \cdot (\sigma_{AB} \cdot \sigma_{AB}) \cdot \sigma_{CA} = \varepsilon$$

Korollar:

$\delta_{\alpha,A}$, $\delta_{\beta,B}$ Drehungen (Drehwinkel α, β, Drehzentren A, B)

$\Rightarrow\ \delta_{\beta,B} \cdot \delta_{\alpha,A} = \delta_{-\gamma,C}$

wobei ABC Dreieck *mit* $\alpha/2 = \angle CAB,\ \beta/2 = \angle ABC,\ \gamma/2 = \angle BCA$

(auch nichteuklidisch: elliptisch, hyperbolisch!)

$\mathbb{T}$ diskrete Translationsgruppe *(der Ebene)*

es gebe Translationen in *zwei* Richtungen

$\mathbb{T}(P)$ *(zweidimensionales)* Gitter (*lattice*) (Spur von P)

$Q_0, Q_1, Q_2 \in \mathbb{T}(P)$ *sodaß:* (PQ_0, PQ_1, PQ_2 paarweise nicht parallel)

$0 < |PQ_0| \leq |PQ_1| \leq |PQ_2|$ minimal $\Rightarrow$

$\mathbb{T} = \langle \tau_0, \tau_1 \rangle$ $\tau_0 : P \mapsto Q_0,\ \tau_1 : P \mapsto Q_1$

denn: $X \in \mathbb{T}(P) \ \Rightarrow\ \exists \tau \in \langle \tau_0, \tau_1 \rangle : |X\tau(Q)| < |PQ_1|$

$|PQ_0| < |PQ_1| < |PQ_2|$ Parallelogramm-Gitter

$|PQ_0| = |PQ_1| < |PQ_2|$ rhombisches Gitter

$|PQ_0| < |PQ_1| = |PQ_2|$ rhombisches Gitter

$|PQ_0| = |PQ_1| = |PQ_2|$ hexagonales Gitter

$PQ_0 \perp PQ_1,\ |PQ_0| < |PQ_1|$ Rechteck-Gitter

$PQ_0 \perp PQ_1,\ |PQ_0| = |PQ_1|$ quadratisches Gitter

$\mathbb{T} \subset \mathcal{S}$ diskrete Gruppe

$\mu \in \mathcal{S}$ (Gleit-)Spiegelung

$\Rightarrow$ $\mathbb{T} \ni \mu \cdot \tau \cdot \mu^{-1} : \mu(P) \mapsto \mu(Q)$

wegen $|PQ_0| = |\mu(P)\mu(Q_0)|$ *und* $|PQ_1| = |\mu(P)\mu(Q_1)| \Rightarrow$

$|PQ_0| < |PQ_1|\,,\ \mu \cdot \tau_0 \cdot \mu^{-1} = \tau_0,\ \mu \cdot \tau_1 \cdot \mu^{-1} = \tau_1^{-1}$ Rechteck-Gitter

$|PQ_0| < |PQ_1|\,,\ \mu \cdot \tau_0 \cdot \mu^{-1} = \tau_0^{-1},\ \mu \cdot \tau_1 \cdot \mu^{-1} = \tau_1$ Rechteck-Gitter

$|PQ_0| = |PQ_1|\,,\ \mu \cdot \tau_0 \cdot \mu^{-1} = \tau_1$ rhombisches Gitter

---

$\delta \in \mathcal{S}$ k-zählige Drehung $\Rightarrow$

kristallographische Beschränkung: $k = 2, 3, 4, 6$

Beweis: die Menge der k-zähligen Zentren *ist* diskret

seien: P *und* Q k-zählige Zentren minimalen Abstands $d \coloneqq |PQ|$

dann sind: $(\alpha = 2\pi/k)$ $P' \coloneqq \delta_{\alpha,Q}(P)$ *und* $Q' \coloneqq \delta_{/}{-\alpha}, P(Q)$

P', Q' k-zählige Zentren *und* $|P'Q'| < d$ für $k = 5$ und $k \geq 7$

Fundamentalbereich (*fundamental domain*)

$\coloneqq$ Repräsentantensystem

bezüglich der durch S induzierten Äquivalenzrelation

$\leftrightarrow$ genau ein Punkt aus jeder Spur

beschränkt *für* Ornamentgruppen

unbeschränkt *für* Fries- *und* Drehgruppen

Translationsgruppe $\mathbb{T}$, $P \in \mathrm{E}^2$ *erzeugt:* Gitter $\mathbb{T}(P)$ *(diskret)*

Fall 0: $\mathbb{T} = \{0\}$ (nulldimensional), *oder:* $(\exists \tau_1 \neq 0)$ $[\tau_1]$ minimal

Fall 1: $T = \langle \tau_1 \rangle$ (eindimensional) *oder:* $(\exists \tau \notin T) \;\Rightarrow\; \tau \neq c\tau_1$

denn sonst: $(\exists k \in \mathbb{Z})\; k-1 \leq c < k :$

$(k-c)\tau_1 \in T$ *und* $0 \leq [(k-c)\tau_1] < 1 \;\Rightarrow\; k = c$

also: $(\exists \tau_2 \notin T)$ $[\tau_1] \leq [\tau 2]$ minimal

Fall 2: $T = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ (zweidimensional) *denn: für* $\tau \in \mathrm{E}^2$

$\Rightarrow (\exists c_1, c_2 \in \mathbb{Z})\; [\tau - (c_1\tau_1 + c_2\tau_2)] \leq ([\tau_1] + [\tau_2]/2 < [\tau_2]$

Crystallography provided the motivation
for the first investigations of periodic groups.
Branko Grünbaum *and* G.C. Shephard, *Tilings and patterns*, 1987

7	Friesgruppen *(frieze, strip groups)*	Niggli 1926
17	Ornamentgruppen *(wallpaper groups)*	Fedorov 1891
		Fricke und Klein 1897, Pólya 1924, Niggli 1924
230	kristallographische Gruppen *(crystallographic groups)*	
		Fedorov 1885
4783	periodische Gruppen im 4-dimensionalen Raum	
		Brown, Bülow, Neubüser, Wondratschek, Zassenhaus 1978

$p1$	Parallelogramm-Gitter	
$p2$		$c2c2c2c2$
cm	rhombisches Gitter	gr
cmm		$ggrrd2d2c2$
pm	Rechteck-Gitter	rr
pg		gg
pgg		$ggc2c2$
pmg		$grc2c2$
pmm		$rrrrd2d2d2d2$
$p4$	quadratisches Gitter	$c2c4c4$
$p4g$		$ggrd2c4$
$p4m$		$grrrd2d4d4$
$p3$	hexagonales Gitter	$c3c3c3$
$p31m$		$grc3d3$
$p3m1$		$grd3d3d3$
$p6$		$c2c3c6$
$p6m$		$ggrrd2d3d6$

cn zyklische Gruppe, dn Diedergruppe
r Spiegelungen, g Gleitspiegelung

G	Gruppe	*Drehsymmetrien am Würfel*
		Deckbewegungen eines Ornaments
P	Menge	*Ecken des Würfels, Punkte der Ebene*
$\mathcal{S}(P)$	Menge von Abbildungen (bijektiv) $P \to P$	
		Permutationen der Ecken, Isometrien

$\varphi : G \to \varphi(G) \subset \mathcal{S}(P)$	G wirkt in P	*action*
$g \mapsto \varphi_g$	Homomorphismus	
$P_g := \{p \mid \varphi_g(p) = p\}$	Fixpunkte von g	
$G_p := \{g \mid \varphi_g(p) = p\}$	Fixgruppe zu p	*stabilizer*
$\mathcal{O}(p) := \{\varphi_g(p) \mid g \in G\}$	Bahn von p	*orbit*
		(Transitivitätsklasse)
$\mathcal{O} := \{O(p) \mid p \in P\}$	(Äquivalenz-)Klasseneinteilung	

diskrete Gruppe $\Leftrightarrow$ alle Bahnen diskret

discrete (discontinuous) group *(d.h., keine Häufungspunkte)*

Fundamentalbereich $:\Leftrightarrow$ vollständiges Repräsentantensystem für $\mathcal{O}$ *(topologisch zusammenhängend)* *(in der Ebene)*

Fundamentalbereich unbeschränkt — Drehungen, Friesgruppen
Fundamentalbereich beschränkt — Ornamentgruppen
(z.B.) Parallelogramm — *2 linear unabhängige Translationen*

Klassifikation — Katalog, *Bestimmungsbuch*

Welche Objekte/Strukturen sollen als *gleich/ähnlich/verwandt* angesehen werden?

(für diskrete Gruppen:) *discrete (discontinuous) groups*

Zwei Gruppen sind gleich $\Leftrightarrow$ es gibt eine affine Abbildung $Ax + b$, unter der einander die Symmetrieelemente der beiden Gruppen *(Gitterpunkte, Drehzentren, Spiegelachsen)* entsprechen.

Gibt es einfache (Unterscheidungs-)Merkmale?
Kann man die Klassen teilweise/vollständig auflisten?
Kann man sie systematisch beschreiben?

„C'est la dissymétrie qui crée le phénomène.“
Diese Worte von Pierre Curie bringen die oft beobachtete Tendenz der Natur zu regelmäßigen Strukturen zum Ausdruck.
Dieser Tendenz liegt wohl immer eine Extremalforderung zugrunde.
L. Fejes Tóth, Reguläre Figuren, Budapest 1965 (Vorwort, p. 8)

Symmetrie

Welche Abbildungen läßt man als Symmetrieabbildung zu?
(Bewegungen, Ähnlichkeiten, ...)

Welche Isometrien (Bewegungen) gibt es? lineare Abbildung $\Rightarrow$
Isometrie $Ax + b$ mit orthogonaler Matrix A
(Gibt es nichtlineare Isometrien?)
Bewegung $\Rightarrow$
Translation, Drehung, Spiegelung, Gleitspiegelung, Drehspiegelung
Drehungen haben Fixpunkt, im Raum eine Drehachse
(reeller Eigenwert! $\Rightarrow$ Eigenvektor parallel Drehachse)

(Fixpunktsatz von Brouwer) Verallgemeinerung:
Jede stetige Abbildung einer abgeschlossenen (d-dimensionalen) Kugel *(ball)* in sich hat einen Fixpunkt.

Alle zu einer Bewegung φ konjugierten Bewegungen $\psi \cdot \varphi \cdot \psi^{-1}$ sind Bewegungen vom selben Typ *(Drehung, etc.)*. Daher:
Fixelemente f werden auf Elemente $\psi(f)$ vom selben Typ abgebildet.

Die Zusammensetzung $\delta_B \cdot \delta_A$ zweier Drehungen δ_A und δ_B
(Drehwinkel α bzw. β um die Drehzentren A bzw. B)
ist eine Drehung um den dritten Eckpunkt C des Dreiecks ABC
(mit den Winkeln $\alpha/2$ bei A und $\beta/2$ bei B). Der Drehwinkel bei C ist

$= 2\varphi - \alpha - \beta$ *(Ebene = euklidische Geometrie),*
$> 2\varphi - \alpha - \beta$ *(Kugel = sphärische Geometrie),*
$< 2\varphi - \alpha - \beta$ *(nichteuklidische Geometrie).*

(Ebene)

Durch zwei linear unabhängige Translationen τ_1 und τ_2 wird (aus einem Punkt P) ein Gitter *(lattice)* $(\tau_1^n \cdot \tau_2^m)(P)$ erzeugt.

Klassifikation: 5 Gitterklassen
(Betrachte dazu Translationen minimaler Länge)