Kachelung $\mathcal{T}$ (Parkettierung, Pflasterung, Mosaik)

tiling (tesselation, mosaic, pavement)

Kachel T (Parkett-, Pflaster-, Mosaikstein) *tile*

T topologische Scheibe/Ball *(disk/ball)*

(meist: abgeschlossen) $\leftrightarrow$ T homeomorph Einheitskreis/-kugel

$\mathcal{T} = \{T_k\}\,,\ k \in \mathbb{N}$ abzählbare Familie

ist Kachelung $:\Leftrightarrow$ *zugleich:*

$\bigcup T_k = \mathbb{R}^d$ $\leftrightarrow$ Überdeckung (von Ebene/Raum)

(durch abgeschlossene T)

$T_i^\circ \cap T_k^\circ = \varnothing$ $(i \neq k)$ $\leftrightarrow$ Packung

durch offene T (Inneres T°)

$\mathcal{T}_1 \cong \mathcal{T}_2$ $:\Leftrightarrow$ kongruent

$T = \{T_i\}$ Mustermenge *(protoset, set of prototiles)*

T gestattet $\mathcal{T}$ (*meist:* T endlich)

$\leftrightarrow$ Jede Kachel aus $\mathcal{T}$ ist kongruent zu einer Kachel aus T

$\mathcal{T}$ monohedral $:\Leftrightarrow$ $|T| = 1$ *(eine einzige Protokachel)*

Symmetriegruppe $S(\mathcal{T})$ von $\mathcal{T}$ *diskrete Gruppe*

$S(\mathcal{T})$ Ornamentgruppe $\leftrightarrow$ $\mathcal{T}$ periodisch

$S(\mathcal{T})$ Friesgruppe $\leftrightarrow$ $\mathcal{T}$ partiell periodisch

$S(\mathcal{T})$ endlich $\leftrightarrow$ $\mathcal{T}$ nicht-periodisch

T aperiodisch *falls: T gestattet eine Kachelung*

$:\Leftrightarrow$ Jede Kachelung mit Kacheln aus T ist nicht-periodisch.

$S(\mathcal{T})$ bewirkt *bei den Kacheln, Kanten, Ecken*

Einteilung in Transitivitätsklassen

$\mathcal{T}$ isohedral $:\Leftrightarrow$ $S(\mathcal{T})$ transitiv auf den Kacheln

$\mathcal{T}$ normal $:\Leftrightarrow$ (a) Größe der Kacheln *nach oben und unten* beschränkt

(b) *Kacheln sind* Scheiben

(c) Durchschnitt *von je zwei Kacheln ist* zusammenhängend

insbesondere: T endlich *(und T_i Scheiben)* $\Rightarrow$ $\mathcal{T}$ normal

---

ad (a) *bedeutet* $(\exists r, R > 0) : (\forall T \in \mathcal{T})\ \exists p, P \in \mathbb{R}^d$

$U(x,h) \coloneqq \{y \mid |y - x| \leq h\}$ $U(p,r) \subset T \subset U(P,R)$

Erweiterungssatz *extension theorem*

Für jede endliche *(Proto-)*Menge beschränkter Kacheln gilt:
Kann man mit ihr beliebig große *(Kreis-)*Scheiben überkacheln,
so gestattet sie eine Kachelung der Ebene.
(*Voraussetzungen notwendig:* T endlich, $T_i \in T$ beschränkt)

(Lemma)

$S = \{T_n\}$ beschränkte Folge kongruenter Kacheln
also: $T_n = \alpha_n(T)$ (α_n Isometrie)
und: $T_n \subset U(P,R)$ ($P \in \mathbb{R}^d, R > 0$)
$\Rightarrow \mathcal{T}_n$ hat *Häufungspunkt* (konvergente Teilfolge)

Beweis:

Sei: ABC Dreieck auf T $\qquad A, B, C \in T$
sei $A_n := \alpha_n(A),\ B_n := \alpha_n(B),\ C_n := {}_n(C)$,
dann sind $A_n, B_n, C_n \in T_n \in U(P,R)$ $\quad$ ($U(P,R)$ *kompakt*)
und: $A_nB_nC_n \leftrightarrow T_n$ *(umkehrbar eindeutig)*
(Bolzano-Weierstraß) $\Rightarrow$ $\qquad A_n$ hat Häufungspunkt
also gibt es konvergente Teilfolge $\lim A_{n_k^A} = A'$ $\qquad \left\{n_k^A\right\} \subset \mathbb{N}$
ebenso konvergente Teilfolge $\lim B_{n_k^B} = B'$ $\qquad \left\{n_k^B\right\} \subset \left\{n_k^A\right\}$
und konvergente Teilfolge $\lim C_{n_k^C} = C'$ $\qquad \left\{n_k^C\right\} \subset \left\{n_k^B\right\}$
also (für $n_k = n_k^C$*)* $\quad \lim_k A_{n_k} = A',\ \lim_k B_{n_k} = B',\ \lim_k C_{n_k} = C'$
$\leftrightarrow \lim_k T_{n_k} = T'$ $\qquad T' \leftrightarrow A'B'C'$ ■

Beweis des Erweiterungssatzes: *(Skizze)*

Betrachte Folge $\mathcal{T}_n$ *von* Patches mit wachsendem Durchmesser
und eine Abzählung $\{P_i\}$ *der* Punkte
eines *(hinreichend engmaschigen)* Gitters
sodaß $\Rightarrow$ jede Kachel enthält einen Gitterpunkt
(zu jedem P_i) *(Lemma)* $\Rightarrow$ $\qquad$ Teilfolge $\left\{n_k^i\right\} \subset \left\{n_k^{i-1}\right\}$
sodaß: $(P_i \in T_k^i \in \mathcal{T}_{n_k^i})$ $\qquad$ Folge $\left\{T_k^i\right\}$ von Kacheln konvergiert
$\Rightarrow$ Diagonalfolge $\left\{\mathcal{T}_{n_k^k}\right\}$ konvergiert gegen Kachelung $\mathcal{T}$ ■