

Symmetrie von geometrischen Figuren/Körpern

*Was ist ein Polygon/Polyeder/Körper?*

geometrisch/topologisch: eine Teilmenge der Ebene  $E^n(\mathbb{R}^n)$   
 (mit/ohne Inneres/Rand?)

abstrakt/kombinatorisch Ecken, Kanten, Seiten und deren Inzidenz  
 Symmetrie Invarianz gegenüber gewissen Abbildungen

Symmetrieabbildungen *meist*: Bewegungen (Isometrien)  
*allgemeiner*: Ähnlichkeitsabbildungen, etc.

Polygon Drehungen und Spiegelungen

|   |   |                     |
|---|---|---------------------|
| $\delta$ Drehung (um $\alpha = 2\pi/n$ )      | kleinste Drehung                          | (Orientierungstreu) |
| $e = \delta^0 = \delta^n$                     | neutrales Element                         |                     |
|   | $\sigma$ Spiegelung                       |                     |
| $C_n = \{\delta^k \mid (0 \leq k \leq n-1)\}$ | zyklische Gruppe                          | (Ordnung $n$ )      |
| $D_n = C_n \cup \sigma C_n$                   | Dieder-Gruppe ( $C_n \triangleleft D_n$ ) | (Ordnung $2n$ )     |

*Bemerkung:* (Potenzen)

$$(g \in G) \quad g^0 := e, \quad g^{k+1} := gg^k = g^k g, \quad g^{-k} := (g^k)^{-1}$$

ergibt:  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G; n \mapsto g^n$  Homomorphismus

von  $g$  erzeugte  $\langle g \rangle := \varphi(\mathbb{Z})$  (zyklische) Untergruppe

Permutation der Ecken Drehung/Spiegelung Permutation der Seiten

|   |                |                               |                |  |
|---|----------------|-------------------------------|----------------|--|
| $\begin{matrix} 1 & 2 \\ \square \\ 4 & 3 \end{matrix}$ | $(1)(2)(3)(4)$ | $\delta^0 (\alpha = 0)$       | $(1)(2)(3)(4)$ | $\begin{matrix} 1 \\ \square \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$ |
| $\begin{matrix} 3 & 4 \\ \square \\ 2 & 1 \end{matrix}$ | $(13)(24)$     | $\delta (\alpha = \pi)$       | $(13)(24)$     | $\begin{matrix} 3 \\ \square \\ 1 \\ 4 \end{matrix}$ |
| $\begin{matrix} 2 & 1 \\ \square \\ 3 & 4 \end{matrix}$ | $(12)(34)$     | $\sigma$                      | $(1)(24)(3)$   | $\begin{matrix} 1 \\ \square \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$ |
| $\begin{matrix} 4 & 3 \\ \square \\ 1 & 2 \end{matrix}$ | $(14)(23)$     | $\delta\sigma = \sigma\delta$ | $(13)(2)(4)$   | $\begin{matrix} 3 \\ \square \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$ |

Beginnend mit der etwas vagen Vorstellung von  
Symmetrie als Harmonie der Proportionen ...

Hermann Weyl, *Symmetrie* (Vorwort, p.7)

(ins Deutsche übersetzt von Lulu Bechtolsheim, Basel 1955)

| Permutation der Ecken                                   | <i>Drehung/Spiegelung</i> | Permutation der Seiten            |
|---|---------------------------|-----------------------------------|
| $\begin{matrix} 1 & 2 \\ \square \\ 4 & 3 \end{matrix}$ | $(1)(2)(3)(4)$            | $\delta^0 (\alpha = 0)$           |
| $\begin{matrix} 2 & 3 \\ \square \\ 1 & 4 \end{matrix}$ | $(1234)$                  | $\delta (\alpha = \pi/2)$         |
| $\begin{matrix} 3 & 4 \\ \square \\ 2 & 1 \end{matrix}$ | $(13)(24)$                | $\delta^2 (\alpha = \pi)$         |
| $\begin{matrix} 4 & 1 \\ \square \\ 3 & 2 \end{matrix}$ | $(1432)$                  | $\delta^3 (\alpha = 3\pi/2)$      |
| $\begin{matrix} 2 & 1 \\ \square \\ 3 & 4 \end{matrix}$ | $(12)(34)$                | $\sigma$                          |
| $\begin{matrix} 4 & 3 \\ \square \\ 1 & 2 \end{matrix}$ | $(14)(23)$                | $\delta^2\sigma = \sigma\delta^2$ |
| $\begin{matrix} 1 & 4 \\ \square \\ 2 & 3 \end{matrix}$ | $(1)(24)(3)$              | $\delta\sigma = \sigma\delta^3$   |
| $\begin{matrix} 3 & 2 \\ \square \\ 4 & 1 \end{matrix}$ | $(13)(2)(4)$              | $\delta^3\sigma = \sigma\delta$   |