Christina Peham
0555426

Zusammenfassung des Vortrags über Spieltheorie

Die Spieltheorie wurde vom Mathematiker John von Neumann und dem Ökonomen Oskar Morgenstern 1943 mit ihrer Veröffentlichung „Theory of games and economic behaviour" begründet.

Anwendung findet diese Theorie in vielen verschiedenen Bereichen, von der theoretischen Ökonomie angefangen, über statistische Entscheidungstheorie, Marketing, Politik. Und Militärwissenschaft; Versicherungsmathematik, Soziologie bis zur Psychologie.

Die Spieltheorie beschäftigt sich damit, optimale Strategien zu finden, das heißt jene Strategie die für den Spieler den besten Spielausgang liefert.
Im Allgemeinen ist das sehr schwierig, jedoch gibt es für bestimmte Voraussetzungen sehr einfache Lösungsverfahren. Im Folgenden schränken wir uns auf ein Spiel mit zwei Spielern und auf Matrixspiele ein die einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel gehorchen, das heißt der Gewinn des einen Spielers bedeutet der Verlust des anderen.
Einige Verfahren um solche Spiele lösen zu können werden nun beschrieben:

Optimale Strategie mittels Sattelpunkt
Wie schon der Name Sattelpunkt impliziert, wird bei dieser Methode eine „Pass-Stelle" in der Matrix gesucht um eine optimale Strategie p_0 bzw. q_0 zu finden.

Definition: In $A \in \mathbb{R}^n_m$ heißt (i, j) ein **Sattelpunkt**, falls a_{ij} das kleinste Element in seiner Zeile und das größte in seiner Spalte ist.

Ein einfaches Beispiel dazu:

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3000 & 0 & -4000 & -3000 \\ 2000 & 3000 & 1000 & 2000 \\ -4000 & 2000 & -1000 & 3000 \end{pmatrix}$ besitzt in der zweiten Zeile und der dritten Spalte einen Sattelpunkt, die optimale Strategie für den ersten Spieler ist deshalb $p_0 = (0,1,0)$ (also er muss auf die zweite Zeile setzen) und die optimale Strategie für den zweiten Spieler ist $q_0 = (0,0,1,0)$.

Nun ist eine Matrix, die das Spiel beschreibt, jedoch nicht immer in der Form vorhanden, dass ein Sattelpunkt abgelesen werden kann. Deshalb braucht man auch andere Verfahren:

Optimale Strategie ohne Sattelpunkt
Haben beide Spieler nur zwei Entscheidungsvarianten, so lassen sich optimale Strategien auch dann angeben, wenn kein Sattelpunkt existiert:

Satz: Im Spiel $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (ohne Sattelpunkt) sind

$$p_0 = (a_{22} - a_{21}, a_{11} - a_{12}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$$

und

$$q_0 = (a_{22} - a_{12}, a_{11} - a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$$ optimale Strategien.

Spiele mit mehr als 2 Varianten pro Spieler lassen sich oft auf solche mit 2 Varianten reduzieren. Dabei hilft folgender Satz:

Satz: Die Suche nach optimalen Strategien für A kann reduziert werden auf die entsprechende Suche für A^*. Dabei entsteht A^* aus A, indem jede Zeile gestrichen wird, die komponentenweise kleiner oder gleich als die andere Zeile ist und indem alle Spalten gestrichen werden, die komponentenweise größer oder gleich einer anderen Spalte sind.

Was macht man aber, wenn auch A^* noch nicht vom Format 2 x 2 ist?
In diesem Fall erhält man optimale Strategien, indem man ein passendes $k \in \mathbb{R}$ zu allen a_{ij} hinzu addiert und anschließend das so entstandene lineare Optimierungsproblem löst. Das kann entweder durch Einführung einer Schlupfvariablen erfolgen oder mit Hilfe eines CAS (mit dem Befehl für Mathematica: ConstrainedMax bzw. ConstrainedMin)
Für deren Lösungen $x_1^*, \dots, x_m^*$ bzw. $y_1^*, \dots, y_n^*$ gilt.

Satz: Für $x_1^* + \dots + x_m^* = a$ gilt auch $y_1^* + \dots + y_n^* = a$ und optimal sind:

$$p_0 := 1/a\,(x_1^*, \dots, x_m^*),\quad q_0 := 1/a\,(y_1^*, \dots, y_n^*)$$

Ein weiterer spezieller Spieltyp sind die symmetrischen Spiele, deren Besonderheit darin liegt, dass die optimale Strategie für den ersten Spieler auch die für den zweiten ist.
Ihre Berechnung ist jedoch nicht so simpel wie die vorhergehenden Beispiele.

Gefangenendilemma
Das Gefangenendilemma ist wahrscheinlich das bekannteste Beispiel aus der Spieltheorie. Es beschäftigt sich mit folgender Situation: Zwei Gefangene sind eines Verbrechens beschuldigt, es fehlen jedoch Indizien. Für die beiden Gefangenen bestehen drei verschiedene Möglichkeiten (beide gestehen: 4 Jahre Haft für beide, einer gesteht: 5 Jahre für den anderen, beide schweigen: 2 Jahre für beide), die in einer Bimatrix zusammengefasst werden:

		Gefangener 2	
		Gestehen	schweigen
Gefangener 1	Gestehen	-4 -4	-5 0
	Schweigen	0 -5	-2 -2

Um nun die optimale Strategie für die Gefangenen ermitteln zu können bedarf es dem so genannten Nash-Gleichgewicht. Das Nash Gleichgewicht beschreibt ein Aufeinandertreffen von besten Antworten. Eine besondere Eigenschaft ist die Strategiekombination, von der ausgehend kein Spieler eine Erhöhung seiner Auszahlung erreichen kann, wenn er einseitig davon abweicht. Im Allgemeinen sind Nash-Gleichgewichte nicht eindeutig bestimmt, weshalb ihre Berechnung nur in strategischen Spielen mittels Algorithmus (bester Wert für Gefangenen 1 spaltenweise markieren, für Gefangenen 2 zeilenweise, s. oben) erfolgen kann.

Literatur

- Bühlmann, Loeffel, Nievergelt: Entscheindungs- und Spieltheorie,1975
- Owen, G.: Spieltheorie, 1971
- Neumann, J.v., Morgenstern, Oskar: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, 1961
- Pilz, Günther: Skriptum zu Linearer Algebra und analytischer Geometrie
- Ableitinger, Christoph: Mitschrift zu „Außermathematische Anwendungen im Mathematikunterricht“