Zusammenfassung

Thema:

Mathematik und Sport –

Mathematische Modellierung des Tennisspiels

Fürntrath Theresa & Schallmeiner Julia

1. Einleitung

Mit unserem Vortrag zu „Mathematik und Sport“ wollten wir zeigen, wie man Angewandte Mathematik im Bereich Sport in den Mathematikunterricht einbringen kann.

Im Speziellen ging es um „Tennis“. In erster Linie galt es, einen ersten Überblick über das Spiel bzw. den Regeln des Spiels zu bekommen. Im Anschluss sollten einige Begriffe und Grundtatsachen der Wahrscheinlichkeitsrechnung wiederholt werden.

Das Tennisspiel wird als Zufallsspiel aufgefasst. Mittels einfacher Wahrscheinlichkeitsberechnungen und einiger Annahmen kann man Gewinnwahrscheinlichkeiten für einzelne Spieler sowie die zu erwartende Spieldauer berechnen. Diese Tatsache haben wir aufgegriffen, um Wahrscheinlichkeitsrechnung – so wie sie in der Schule betrieben wird[[1]](#footnote-2) - verständlicher und vorallem interessanter zu gestalten.

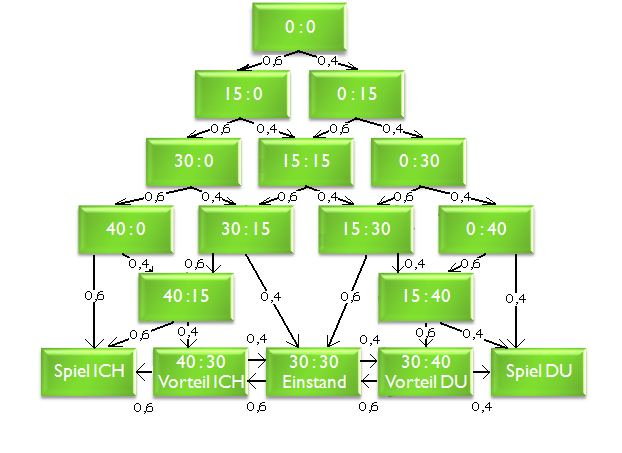
1. Beispiele für den Unterricht

DU und ICH wir spielen jetzt Tennis und wir wollen daraus eine mathematisches Modell konstruieren. Wir setzen die Wahrscheinlichkeiten, dass ICH einen Punkt mache bzw. DU einen Punkt machst als bekannt voraus.

Als BSP nimmt man z.B. an:

Das heißt: ICH spiele etwas besser wie du.

Mit einem sogenannten orientierten Graphen (siehe unten: endliche Markowsche Kette) kann dargestellt werden, wie sich der Spielstand während eines Spiels ändert.



An dieser Stelle könnte man nun den Begriff der Markowschen Kette einführen.

*Ein beliebiges System, in dem der Übergang aus einem Zustand in einen anderen nicht von der Vorgeschichte des Prozesses, sondern nur vom aktuellen Zustand abhängt, nennt man Markowsche Kette.*

Unsere Abbildung kann als konkretes Beispiel eines Graphen einer endlichen Markowschen Kette verstanden werden, die die Zustände eines Systems beschreibt, nämlich eines einzelnen Spiels in einem Tennismatch.

Nun kann man sich die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Spielstände nach der jeweiligen Anzahl der Ballwechsel berechnen.

Z.B.: Wahrscheinlichkeiten der möglichen Spielstände nach drei Ballwechsel:

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit:

Nach 4 oder 5 gespielten Bällen:

Zufällige Irrfahrt (innerhalb dreier Zustände) (einfacher: es geht hier um das Spiel um „Vorteil“mich oder für dich- (Betrachten hierfür die letzte Zeile unserer Abbildung gesondert):

Erhalten dabei eine 5x5-Matrix:

Die Matrix T heißt Übergangsmatrix der Markowschen Kette.

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände nach dem 5. Ballwechsel fassen wir als Komponenten des Zeilenvektors

... Vektor der Anfangswahrscheinlichkeitsverteilung

Gemäß der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

Wenn man sich nun das gleiche für die restlichen 4 Zustände überlegt, stellt man fest, dass man nach dem ersten Ballwechsel die Wahrscheinlichkeiten der neu entstehenden Zustände als entsprechende Komponenten des Vektors

bestimmen kann.

Nach Wiederholung derselben Operationen mit den Vektoren

Ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten nach n gespielten Bällen aus den Komponenten des Vektors

***Anwendung der Markowschen Kette***

Übergangswahrscheinlichkeiten aus einem Zustand in den folgenden verändern sich nach bestimmten Gesetzen. )

Beispiel: Tiebreak (Stand 6:6 in Sätzen:

Nehmen wir an, dass Spieler 1 nach einem gewonnenen Punkt (Zustand S1) den nächsten Punkt mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,5 verliert (seine Aufmerksamkeit und sein Eifer sind normal). Aber nach einem verlorenen Punkt (Zustand S2) ist Spieler 1 konzentrierter. Deshalb ist es nur natürlich anzunehmen, dass er den nächsten Punkt mit größerer Wahrscheinlichkeit gewinnt, etwa mit q = 0,7.

Daraus entsteht die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten aus dem Zustand S1 und S2

Nehmen wir an, dass Spieler 1 das Tiebreak mit einem gewonnenen Punkt begann; p0 = 0,5. Die Wahrscheinlichkeit, auch den zweiten Punkt zu gewinnen, beträgt p1 = 0,5, die Wahrscheinlichkeit, ihn zu verlieren q1 = 0,5. Wir werden (p1,q1) als Anfangswahrscheinlichkeitsverteilung betrachten.

0,5 0,5

0,7 0,3

0,7 0,3

**T =**

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er den nächsten (d.h. den dritten) Punkt gewinnt, bzw. verliert?

Dazu bezeichnen wir die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten mit p2 und q2 und finden:

p2= 0,5² + 0,5.0,7 = 0,60, q2= 0,5² + 0,5.0,3 = 0,40 → (p2,q2) = (p1,q1).T

(n+1)-ten Ballwechsel: (pn,qn) = (pn-1,qn-1).T = (p1,q1).Tn-1

Schließlich lassen sich auch die Werte der Grenzwahrscheinlichkeiten berechnen:

p\* = lim pn = 7/12, q\* = lim qn = 5/12

***Weitere Berechnungen in der Schule***

Beispiel: Berechne die Gewinnwahrscheinlichkeit von Spieler A!

q := 1 − p; GA,k … Wahrscheinlichkeit für Gewinn von Spieler A nach k Punkten

GA,4 = p4, GA,5 = 4p4q, GA,6 = 10p4q²

Falls das Spiel nach 6 Punkten nicht beendet ist, so muss es nach 6 Punkten 40:40 stehen. Dies tritt mit Wahrscheinlichkeit r = 20p³q³ = E6

ein. Wir bezeichnen mit E6 die Wahrscheinlichkeit für Einstand nach 6 Punkten.

GA,7 = 0 (Kein Spiel kann nach 7 Punkten beendet sein)

GA,8 = rp² = 20p5q³, E8 = 2rpq = 40p4q4, GA,10 = p2.E8 = 40p6q4.

Insgesamt gewinnt daher A mit der Wahrscheinlichkeit

GA = GA,4 + GA,5 + GA,6 + GA,8 + GA,10 + . . . .

Dabei führt GA,8 + GA,10 + . . . auf folgende geometrische Reihe:

20p5q3 + 40p6q4 + 80p7q5 + . . . = 20p5q3(1 + 2pq + (2pq)2 + (2pq)3 + . . . =

= 20p5q3 / (1 − 2pq).

Die Reihe konvergiert, weil 2pq ≤ 0,5. A gewinnt daher mit Wahrscheinlichkeit:

GA = p4 + 4p4q + 10p4q2 + (20p5q3) / (1 − 2pq)

Literaturverzeichnis

Bücher:

Sadovskij, L.E.; Sadovskij, A.L.: Mathematik und Sport. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1991.

Bardy, P.: Mathematische Modellbildung und Computersimulationen als rationale Grundlage für Entscheidungen im Tennissport, Didaktik der Mathematik 21, 207 – 222, 1993.

Homepages:

<http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/mamaeusch/index.php?content=lehrerfortbildung> (aufgerufen am 27.10.2009)

<http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf> (aufgerufen am 22.10.2009)

1. Lehrplan AHS Oberstufe:

   5. Klasse: u.a.

   -Berechnen von Wahrscheinlichkeiten aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten; Arbeiten mit der Multiplikations- und der Additionsregel; Kennen des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit [↑](#footnote-ref-2)