Fibonaccizahlen in der Natur

Doris Abraham
0506087

20. Januar 2010

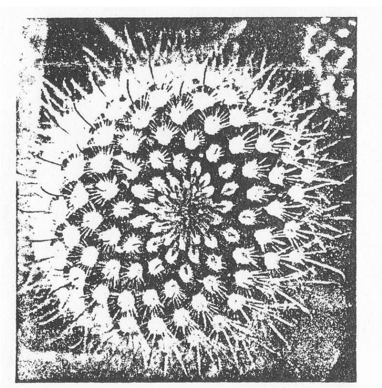
1 Phyllotaxis

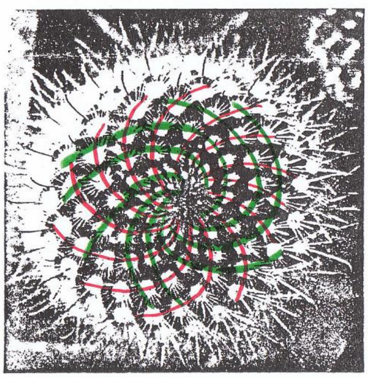
1.1 Worum geht es?

So unglaublich auch manches in der Welt erscheint so unglaublich ist es doch diese Erscheinungen mit anderen naturwissenschaftlichen Phänomenen vergleichen und beschreiben zu könnn. So verblüfft uns die Natur immer wieder mit Gesetzmäßigkeiten die auf mathematische Strukturen zurückzuführen sind...Man möchte fast meinen, dass ohne der Natur die Mathematik nie entstanden wäre.

Wenn wir uns eine Ananas oder eine Sonnenblume ansehen, so können wir zwei Arten von Spiralen feststellen, die sich in entgegengesetzte Richtungen bewegen. Diese Spiralen nennen wir Parastichis. Aber was hat das jetzt mit den Fibonaccizahlen zu tun?
Nun, ein hawaiianischer Arbeiter kam auf die Idee, diese Spiralen zu zählen. Und so zählte er über zwei Jahre lang die Spiralen von Ananasfrüchtetn und bemerkte dabei, dass die Zahlen 5, 8, 13, 21, 34 immer wieder die Anzahl der Spiralen ergab; je nach Größe der Ananas.
Solche Spiralen hat man auch bei Palmen festgestellt, wo die Palmblätter auf diese Spiralen zurückführen. Hier stellte man die Zahlenfolge 2, 3, 5, 8, 13 fest.

Wenn wir nun das Bild betrachten, sehen wir 8 Spiralen gegend en Uhrzeigersinn



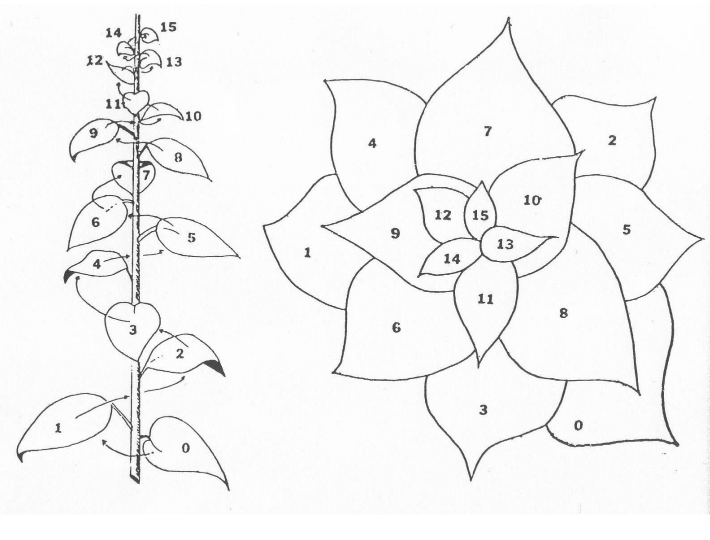


und 5 Spiralen im Uhrzeigersinn. Weiters haben wir die Ursprünge der Spiralen nummeriert und zwar nach der Reihenfolge ihres Entstehens. Diese Ursprünge nennen wir Primordia.
Beobachten wir nun solche Phänomene, so können wir sagen:

Die Phyllotaxis einer Pflanze, wie zum Beispiel Zapfen, Gänseblümchen, Ananas, Sonnenblume, etc., besteht aus einem Paar ganzzahliger Zahlen die mit $\frac{m}{n}, m > n$ notiert wird, wobei m und n die Anzahl der Spiralen gegen beziehungsweise im Uhrzeigersinn ist.

1.2 Divergenz und Verhältnis

Ein weiteres Phänomen, das man aus den Beobachtungen von Pflanzen kennt, ist ein spezieller „Blattwinkel“, der in den meisten Fällen $137°30'27''$ beträgt. Dieser Winkel bestimmt die Divergenz einer Pflanze, und ist eine irrationale Zahl, das heißt: Hat unser System Blätter, so kommt es nie zu einer genauen Überlagerung der darauffolgenden Blätter.
Sehen wir uns ein System an, das Blätter besitzt, so können wir den Wert der Divergenz annähern, indem wir zwei Blätter betrachten, die nahezu deckungsgleich sind. Folgendermaßen legen diese zwei Blätter eine Ortostichi fest, eine Linie, die annähernd parallel zum Stamm der Pflanze verläuft.



Wenn wir das Bild betrachten, folgen wir der genetischen Spirale hinauf, bis wir zu einem Blatt kommen, das sich mit dem untersten Blatt fast überdeckt. In unserem Fall wäre dies Blatt 8, welches sich mit Blatt 0 fast überdeckt.

Um von Blatt 0 zu Blatt 8 zu gelangen, müssen wir den Stamm der Pflanze dreimal umkreisen. Der Wert $\frac{3}{8}$ gibt uns nun eine Annäherung für die Divergenz.

Damit haben wir nun:
Wir bestimmen zwei Blätter von einer Pflanze die eine Ortostichi bilden, und folgen der genetischen Spirale von einem Blatt zum anderen. Die Anzahl der Umdrehungen durch die Anzahl der dabei „überwunden" Blätter gibt uns dann ein phyllotaxisches Verhältnis.

Meistens sind die phyllotaxischen Verhältnisse aus der Folge:
$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \ldots \frac{F(k)}{F(k+2)}$, wenn F die Fibbonaccireihe darstellt.

1.3 Bravais'sche Näherungformel

1.3.1 Illustration der Formel

Diese Formel gibt eine gut Näherung and en Wert der Divergenz d zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primordia an, in einem System, in dem die Phyllotaxis bekannt ist. Diese Formel lautet:

$$d \cong \frac{c\mu+s\nu}{cm+sn}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein phyllotaxischer Bruch der von sechs ganzzahligen Parametern festgelegt wird:

- m,n ist die Phyllotaxis des Systems, welche experimentell festgelegt wird

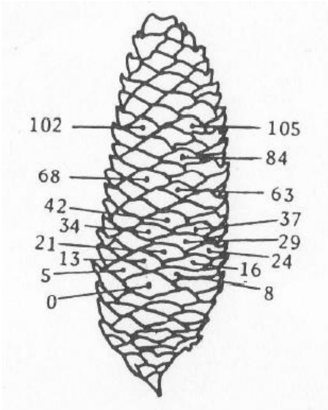
- μ, ν sind die Konvergenten des Kettenbruchs von $\frac{m}{n}$, die einen der beiden Gleichungen $m\nu - n\mu = \pm 1$ erfüllt, die $d < \frac{1}{2}$ werden lässt.

- c, s sind Zahlen, die die Gleichungen $cm + sn = k$ erfüllt wobei k die Anzahl der Primordia zwischen den Primordia, die eine Ortostichi bilden.

Bevor wir jetzt aber diese Formel an einem Beispiel anwende, brauchen wir noch das Bravais Theorem. Dieses erlaubt uns die Schuppen von Ananas oder Fichtenzapfen etc. nach ihrem Entstehen zu nummerieren.

Bravais Theorem:
Die Zahlen der aufeinanderfolgenden Schuppen einer gegebenen Parastichi unterscheiden sich durch die Zahl der jeweiligen Art der Parastichi.

1.3.2 Beispiel



Schauen wir uns einen Zapfen an, und stellen seine Phyllotaxis fest. Wir erkennen 8 Spiralen von Schuppen, die gegen den Uhrzeigersinn wandern und fünf Parastichis die im Uhrzeigersinn sich um den Zapfen winden. Also $\frac{m}{n} = \frac{8}{5}$.
Nun suchen wir uns irgendeine Schuppe nahe des Ursprungs und beziffern sie mit 0. In den beiden benachbarten Schuppen schreiben wir in die linke Schuppe 5 und in die rechte Schuppe 8 hinein und ordnen sie somit der jeweiligen Spirale zu. Die weiteren Schuppen werden nach dem Bravais'schen Theorem benannt.
Auf dem Bild können wir erkennen, dass die Schuppen $0, 21, 42, 63, ...$ und $0, 34, 68, 102, ...$ jeweils eine Orthostichi bilden. Da wir nun unsere Schuppen nummeriert haben, könne wir mit dem Suchen der restlichen Paramter beginnen.

1. Wählen uns eine Orthostichi: $0, 21, 42, ...$
   Daraus folgt: $cm + sn = 21 \rightarrow 8c + 5s = 21$
   Das ist eine diophantische Gleichung mit den einzigen Lösungen $c = 2$ und $s = 1$

2. Die Konvergenten vom Bruch $\frac{8}{5}$ sind $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}$ und $\frac{8}{5}$
   Der Konvergent $\frac{3}{2}$ gibt uns $\mu = 3, \nu = 2$ und daraus folgt: $m\nu - n\mu = 1$ und somit $d \cong \frac{c\mu + s\nu}{cm + sn} < \frac{1}{2}$

Somit haben wir alle gesuchten Parameter gefunden und die Approximation von d nach der Formel von Bravais ist gegeben mit $\frac{8}{21} (\approx 0,381 = 137.16°)$