*The simplest simple groups are just the cyclic groups of prime order,*
*and because these are almost too simple for words,*
*most of us usually understand the words 'simple group'*
*to mean 'finite non-cyclic simple group'.*
John Horton Conway, *Monsters and Moonshine*,
Math. Int. 2(1980),165–171

direktes Produkt

| | | |
|---|---|---|
| | $(G, \circ), (H, \diamond)$ | Gruppen |
| | $G \otimes H := (G \times H, \bullet)$ | direktes Produkt von $G$ und $H$ |
| | $(g, h) \bullet (g', h') := (g \circ g', h \diamond h')$ | *‚äußeres' direktes Produkt* |
| | $\lvert G \otimes H\rvert = \lvert G\rvert \cdot \lvert H\rvert$ | $G \cong G \times \{e\},\ H \cong \{e\} \times H$ |
| *wenn* | H*1, H*2 <G | abelsche Gruppe $G$ |
| | | *oder*: $h_1 h_2 = h_2 h_1$ $(\forall h_i \in H_i)$ |
| | $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ | *(‚fast disjunkt', oder ‚orthogonal')* |
| *dann:* | | |
| | $\langle H_1, H_2\rangle = H_1 H_2 \cong H_1 \otimes H_2$ | |
| | $h_1 h_2 \mapsto (h_1, h_2)$ | *‚inneres' direktes Produkt* |
| *oft auch:* | $H_1 \oplus H_2$ | direkte Summe *(wenn abelsch)* |
| *z.B.* | $T_1 \oplus T_2 \subset V$ | Teilräume von Vektorräumen |

**Klassifikation der endlichen kommutativen Gruppen**

Jede endliche abelsche Gruppe ist
das direkte Produkt von zyklischen Gruppen $C_q$.
Läßt man für $q$ nur Primzahlpotenzen zu,
so ist die Darstellung *(bis auf die Reihenfolge)* eindeutig.

1. und 2. Sylowscher Satz *(Beispiel für Struktursätze)*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $H < G,\ \lvert H\rvert = p^t$ | $p$-Gruppe | ($p$ prim) |
| *wenn* | $\lvert G\rvert = p^s \cdot m$ | $(p, m) = 1$ | (*also:* $s$ maximal) |
| *dann* | $H < G,\ \lvert H\rvert = p^s$ | $p$-Sylowgruppe | |

In jeder Gruppe gibt es
zu jedem Primteiler $p$ der (Gruppen-)Ordnung
$p$-Gruppen für jedes $p^t$, insbesondere eine $p$-Sylowgruppe,
*und* alle $p$-Sylowgruppen sind konjugiert.

*The largest coordinated effort ever undertaken to discover and prove a single theorem was the so-called classification of finite simple groups.*
*. . . The proof runs approximately 15,000 pages.*
*Many people rate this classification among the greatest achievements in the history of mathematics.*
COMAP, *Principles and Practice of Mathematics*, 1997, p.572

Klassifikation der endlichen Gruppen

Bausteine: einfache Gruppen (Galois 1830) *(simple groups)*

$G$ einfach $:\Leftrightarrow$ die homomorphen Bilder $\varphi(G)$ sind trivial (d.h. isomorph zu $C_1$ oder $G$)

$\Leftrightarrow$ $G$ hat keinen echten Normalteiler (d.h. $\neq \{e\}, G$)

$G$ abelsch und einfach $\Leftrightarrow$ $|G|$ prim.

(*denn:* jede Untergruppe ist Normalteiler)

kleinste nicht-kommutative einfache Gruppe:

die alternierende Gruppe $A_5$

($A_5 < S_5$, i.e., die geraden Permutationen von 5 Elementen,
$|A_5| = 5!/2 = 60$, isomorph zur Ikosaeder-Drehgruppe)
$A_5 \cong I$ : der Ikosaeder hat 15 zweizählige Drehachsen
*(durch Kantenmitten für 15 Kantenpaare)*, die 5 Achsenkreuze bilden,
die durch die Ikosaeder-Gruppe permutiert werden.

---

**Klassifikation der einfachen Gruppen**

Es gibt einige unendliche Familien

(u.a. Galois $A_n$ ($n \geq 5$), Chevalley 1955),

sowie 26 sporadische Gruppen (Mathieu 1861, 1955 bis ca. 1981)

u.a. das *Monster M* mit der Ordnung

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

Es gibt keine nicht-abelsche einfache Gruppe ungerader Ordnung.

(Feit-Thompson 1963)