$f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$	zahlentheoretische Funktion
$(m,n) = 1 \;\Rightarrow\; f(mn) = f(m)f(n)$	f multiplikativ ($\Rightarrow$ $f(1) = 1$)
$(f{*}g)(n) := \sum_{d/n} f(d)g(\frac{n}{d})$	Faltung $f{*}g$ *convolution*
$F(n) := \sum_{d/n} f(d) = f{*}1$	F Summenfunktion *zu* f

Die multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen bilden bezüglich der Faltung eine abelsche Gruppe (Einheit ε).

Möbiussche Umkehrformel $F = f{*}1 \;\Leftrightarrow\; f = F{*}\mu$

$$F(n) = \sum_{d/n} f(d) \quad\Leftrightarrow\quad f(n) = \sum_{d/n} F(d)\mu(\tfrac{n}{d})$$

Beispiele

$\varepsilon(n) := \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	„Einheit“
$1(n) := 1$	„Eins-Funktion“
$\mathrm{Id}(n) := n$	Identität
$\mu(n) := \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & p^2/n \\ (-1)^\nu & n = p_1 p_2 \cdots p_\nu \end{cases}$	Möbius-Funktion (invers zu 1)
$\sigma_k(n) := \sum_{d/n} d^k$	Teilerpotenzsummen
$\sigma_0 = \tau,\ \sigma_1 = \sigma$	Teilerzahl, Teilersumme
$\varphi(n) = n \prod_{p/n}(1 - \frac{1}{p})$	Euler-Funktion

Die Euler-Funktion φ ist multiplikativ und $\varphi{*}1 = \mathrm{Id}$.

Genauer: $\mathbb{Z}_m^* \otimes \mathbb{Z}_n^* \cong \mathbb{Z}_{mn}^*$ $(m,n) = 1$

durch Bijektion $(\overline{r_1}, \overline{r_2}) \;\leftrightarrow\; \overline{r_1 n + r_2 m}$ *und:*

Chinesischer Restsatz

Jedes System von *(simultanen)* Kongruenzen $x \equiv a_i (\bmod m_i)$
(mit m_i paarweise relativ prim, $m = \prod m_i$)
ist modulo m eindeutig lösbar.

(Ist $(\frac{m}{m_i})y_i \equiv 1 \ (\bmod m_i)$
so ist $x = \sum a_i (\frac{m}{m_i}) y_i$ eine Lösung.)

$(m,n) = 1 \;\Rightarrow\; d/mn \;\Leftrightarrow\; d = d_1 d_2$ mit d_1/m und d_2/n *(bijektiv!)*

daher: f, g multiplikativ $\Rightarrow f{*}g$ multiplikativ

$$f{*}g(mn) = \sum_{d/mn} f(d)g(\tfrac{mn}{d}) \qquad = \sum_{d_1/m, d_2/n} f(d_1)f(d_2)g(\tfrac{m}{d_1})g(\tfrac{n}{d_2})$$

$$= \left(\sum_{d_1/m} f(d)g(\tfrac{m}{d_1})\right)\left(\sum_{d_2/n} f(d)g(\tfrac{n}{d_2})\right) = f{*}g(m) f{*}g(n)$$