$\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad \alpha = a + \varrho \qquad$ *wo* $a \in \mathbb{Z}$ *und* $0 \leq \varrho < 1$

Schreibweise: $a =: \lfloor \alpha \rfloor$ *und* $\varrho =: \{\alpha\}$

rekursiv: $\qquad \alpha = a_0 + \varrho_0 \qquad a_0 \in \mathbb{Z}$

$(\ \varrho_{k-1} \neq 0\ )$ $\qquad \dfrac{1}{\varrho_{k-1}} = a_k + \varrho_k$

mit $1 \leq a_k := \left\lfloor \frac{1}{\varrho_0} \right\rfloor, \ \varrho_k := \left\{ \frac{1}{\varrho_{k-1}} \right\}$

Einsetzen ergibt: $\qquad \alpha = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \varrho_1}$

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \varrho_2}} \qquad \textit{etc.}$$

(regelmäßiger) Kettenbruch *(endlich oder unendlich)*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\cdots}}}}} =: [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots]$$

(k-ter) Näherungsbruch $\qquad \alpha_k := [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$

$\alpha = \dfrac{p}{q}$ rational *(Rekursion)*

$p = a_0 q + r_0 \qquad \dfrac{p}{q} = a_0 + \dfrac{r_0}{q} = a_0 + \dfrac{1}{\frac{q}{r_0}}$

$q = a_1 r_0 + r_1 \qquad \dfrac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}}$

$r_{k-1} = a_{k+1} r_k + r_{k+1} \qquad \dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, \cdots, (a_{k+1} + \dfrac{r_{k+1}}{r_k})]$

$= [a_0; a_1, \cdots, a_{k+1}, \frac{r_k}{r_{k+1}}]$

euklidischer Algorithmus $\Rightarrow$ *bricht ab!*

$r_{n-2} = a_n r_{n-1} + 0 \qquad \dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, \cdots, a_n]$

$(\ \textit{es ist}\ a_n \geq 2\ )$ $\qquad = [a_0; a_1, \cdots, a_n - 1, 1]$

Kettenbruch $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$ *continued fraction*

Näherungsbruch $\alpha_k = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_k]$ *k-th convergent*

$\alpha_0 = a_0 = \dfrac{a_0}{1}$ $\qquad \dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{a_0 \cdot 1 + 0}{a_0 \cdot 0 + 1}$

$\alpha_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ $\qquad \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{a_1 p_0 + 1}{a_1 q_0 + 0}$

$\alpha_2 = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}} = \dfrac{a_2(a_1 a_0 + 1) + a_1}{a_2 a_1 + 1}$ $\qquad \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0}$

setze $\dfrac{p_{-2}}{q_{-2}} := \dfrac{0}{1}$ und $\dfrac{p_{-1}}{q_{-1}} := \dfrac{1}{0}$

Induktionsannahme:

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$
$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

angewendet auf $\alpha'_k = [a_0; a_1, \cdots, a_{k-1}, a'_k]$ $\qquad a'_k = a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}$

$$\alpha'_k = \frac{p'_k}{q'_k} = \frac{a'_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a'_k q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})q_{k-1} + q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}}$$

wegen *ergibt das*

$$\alpha_{k+1} = \alpha'_k = \quad = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

(Lemma) $p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} = (-1)^k$ *(Induktion)*

$\Rightarrow$ *Anwendung:* lineare diophantische Gleichungen

Folgerungen: $p_k \uparrow$ und $q_k \uparrow$ *(streng monoton)*

Intervallschachtelung *(streng monoton)*

$$\alpha_{2k}\uparrow, \ \alpha_{2k+1}\downarrow \text{ sowie } (\alpha_{2k+1} - \alpha_{2k})\downarrow 0$$

(Diophantische Approximation) $(\ p = p_k, \ q = q_k\ )$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$ *(„beste“ Approximation)*

Kettenbruch $\alpha = [a_0; a_1, \cdots]$ a_k (Teil-)Nenner

periodisch $a_k = a_{k+P}$ für $k \geq K+1$

$$\Rightarrow \quad \alpha = [a_0; a_1, \cdots, a_K, \alpha'] = [a_0; a_1, \cdots, a_{K+P}, \alpha']$$

$$\alpha' := [a_{K+1}; a_{K+2}, a_{K+3}, \cdots]$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \alpha'_{K+1} = \frac{\alpha' p_K + p_{K-1}}{\alpha' q_K + q_{K-1}} = \frac{\alpha' p_{K+P} + p_{K+P-1}}{\alpha' q_{K+P} + q_{K+P-1}} = \alpha'_{K+P+1}$$

daher: $\alpha = r + s\sqrt{d}$ $r, s \in \mathbb{Q}, d \in \mathbb{N}$

Bemerkung: $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ $A, B, C \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\alpha - a_0} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ $A'\varrho_0^2 + B'\varrho_0 + C' = 0$ $A', B', C' \in \mathbb{Z}$

wobei $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$ *(gleiche Diskriminante)*

ferner gilt: Koeffizienten beschränkt *(nur abhängig von α !)*

$\Rightarrow$ nur endlich viele ϱ_k, *also:* periodisch!

Die Kettenbruchentwicklung $\alpha \in \mathbb{R}$ ist (gemischt) periodisch
$\Leftrightarrow$ $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ $(d \in \mathbb{N})$ *(quadratische Irrationalität)*

Beispiele:

goldener Schnitt $1 : \alpha = \alpha : (1+\alpha)$ $(\ \alpha^2 - \alpha - 1 = 0\ )$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, \ldots] \qquad (\ \alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}\ )$$

wobei $p_{k+1} = p_k + p_{k-1},\ q_{k+1} = q_k + q_{k-1}$

$\frac{1}{1} = \frac{2}{1} = \frac{3}{2} = \frac{5}{3} = \frac{8}{5} = \frac{13}{8} = \cdots = \frac{F_{k+1}}{F_k}$ *(Fibonacci-Zahlen F_n)*

(Eulersche Zahl) $\mathrm{e} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$ *(Euler)*

$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots]$ *(keine Regel bekannt)*

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{\cdots}}}}$$ *(Lord Bouncker)*