$2 \leq g \in \mathbb{N}$	Basis *(Grundzahl)*	
$0, 1, \cdots, g-1$	Ziffern	*digits*
$g = 10$	Dezimalzahlen, -system (dekadisch)	
$g = 2, 8, 16$	Dual- *(binäre)*, Oktal-, Hexadezimalzahlen	

---

g-adische Zahl	$\{d_k \mid k \in \mathbb{Z}, d_k = 0 \text{ für } k \geq K\}$	(d_k Ziffern)
g-adische Entwicklung	$r = \sum_k d_k \cdot 10^k$	(von $r \in \mathbb{R}$)

$\langle d_m d_{m-1} \ldots d_1 d_0 \rangle$	ganze g-adische Zahl
$\langle d_m \ldots d_1 d_0 \rangle, \langle d_{-1} d_{-2} \ldots d_n \rangle$	*(endlicher)* g-adischer Bruch
$\langle d_m \ldots d_1 d_0 \rangle, \langle d_{-1} d_{-2} \ldots \rangle$	*(unendlicher)* g-adischer Bruch
$\langle d_m \ldots d_1 d_0 \rangle . \langle d_{-1} d_{-2} \ldots \rangle$	englische Schreibweise *decimal point*
$\langle . d_{-1} d_{-2} \ldots \rangle \cdot 10^m$	*„wissenschaftliche“ Notation*
$r_n = \sum_{k \geq -n} d_k \cdot 10^k$	Näherungsbruch
$\lvert r - r_n \rvert \leq g^{-n}$	Rundungsfehler

(gemischt) periodischer Bruch $d_k = d_{k+p}$ $(k \geq P)$

$$d_m \cdots d_1 d_0, d_{-1} \cdots d_{P-1} \overline{d_P \cdots d_{P+p-1}}$$

Vorperiode $d_m \cdots d_{P-1}$ $d_P \cdots d_{P+p-1}$ Periode

r hat endliche g-adische Darstellung $\Leftrightarrow$ periodisch mit Periode $\overline{g-1}$

(d.h. Darstellung zweideutig) $\Leftrightarrow$ $r = \frac{p}{q}$ rational mit $q \mid g^s$

Darstellung eindeutig $\Leftrightarrow$ irrational *oder*

rational $\frac{p}{q}$ mit $(\exists t)(t, g) = 1, (t, q) > 1$

Darstellung von r periodisch $\Leftrightarrow$ r rational

Anwendungen:

praktisches Rechnen	*(Fest- oder Gleitkommaarithmetik)*
Definition *(Einführung)* der reellen Zahlen	
$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar	*Cantor*
Konstruktion von Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	*Cantor, Peano*
berechenbare reelle Zahlen	*(konstruktive Mathematik)*

ganze Zahlen

$n \in \mathbb{N}$ rekursiv *(Division mit Rest)* $(\ 0 \leq r_k \leq g-1\ )$

$$n = n_0 = n_1 g + r_0 \qquad d_0 := r_0$$

$$n_k = n_{k+1} g + r_k \qquad d_k := r_k$$

ergibt: $n = d_0 + d_1 g + d_2 g^2 + d_2 g^3 + \cdots + d_k g^k \quad (\ n_{k+1} = 0\ )$

Brüche

$c = a/b$, $(a,b) = 1$ $\quad a = c_0 b + r_0 \qquad 0 \leq r_k \leq b-1$

$$r_0 g = c_1 b + r_1 \qquad \Rightarrow \quad 0 \leq c_k \leq g-1$$

$$r_{k-1} g = c_k b + r_k \qquad d_k := c_k$$

ergibt: $c = \frac{a}{b} = c_0 + \gamma_k + \varrho_k$

mit $\gamma_k = d_1 g^{-1} + d_2 g^{-2} + \cdots + d_k g^{-k} \qquad \Rightarrow \quad \gamma_k g^k \in \mathbb{N}$

und $\varrho_k = \frac{g^{-k} r_k}{b}$ $\qquad$ *und* $r_k = 0 \ \Leftrightarrow\ b \mid g^k$

nur b verschiedene Werte für r_k

$\Rightarrow\ (\exists m,n)\ r_m = r_{m+n}$ $\qquad$ *also:* periodisch

Rückgewinnung des Bruchs: $\qquad$ $($*wegen* $\varrho_m = \varrho_{m+n} g^n)$

$$\frac{a}{b} = c_0 + \frac{\gamma_{m+n} g^{m+n} - \gamma_m g^m}{g^m (g^n - 1)}$$

rein periodisch $\quad \Leftrightarrow \quad r_0 = r_n$

$$\Leftrightarrow\ b \mid (r_n - r_0)\ \Leftrightarrow\ b \mid a(g^n - 1)\ \Leftrightarrow\ b \mid (g^n - 1)$$

denn: $r_k = a g^k - b(c_0 + \gamma_k) g^k$

Länge der Vorperiode $\leq t$ $\qquad \Leftrightarrow\ \frac{a g^t}{b}$ rein periodisch

---

$c = a/b$ $\qquad b = b_1 b_2,\ b_1 \mid g^t,\ (b_2, g) = 1 \qquad (a,b) = 1$

(minimale) Länge der Vorperiode $\qquad \min\{t, b_1 | g^t\}$

(minimale) Länge der Periode $\qquad P = \operatorname{ord}(g) \bmod b_2$ *d.h.* $P \mid \varphi(b_2)$

. . . , daß sie gleiche Mächtigkeit haben, wenn man imstande ist, sie nach irgendeinem bestimmten Gesetze so einander zuzuordnen, daß zu jedem Elemente von φ ein Element von N und auch umgekehrt zu jedem Element von N ein Element von φ gehört

Georg Cantor *(ca. 1879)*

(Cantor) $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis *(indirekt)*:

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{N} & \to & [0,1) \\ & & n & \mapsto & r_n \end{array} \qquad \textit{(Bijektion)}$$

$$r_n = 0{,}d_{n1}d_{n2}d_{n3}\cdots \qquad (\ g \geq 3\ )$$

Diagonalverfahren

$$r := 0{,}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots \qquad (\ d \neq \varepsilon_n = 0,1\ )$$

$$\Rightarrow \quad (\forall n)\ r \neq r_n$$

Widerspruch! ■

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ sind gleichmächtig.

$(r,s) \in I^2$

$$r = 0{,}r_1r_2r_3\cdots$$

$$s = 0{,}\,s_1s_2s_3\cdots$$

Grundidee: $(r,s) \mapsto 0{,}r_1s_1r_2s_2r_3s_3\cdots$ *„mischen“*

Problem: Periode $\overline{g-1}$ bei r oder s *(Zweideutigkeit!)*

Lösungsansatz:

(oBdA) Jeder Dualbruch enthält unendlich viele Nullen

$\Rightarrow$ Mischen von Einser-Blöcken

(.0 10 0 1110 . . . , .*10 110 10 11110* . . .) $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ .0 *10* 10 *110* 0 *10* 1110 *11110* . . .