Algebra für Lehramtskandidaten

SS 2005 Peter Schmitt *Aufgaben für den 4. bzw. 5. April*

Beachte: Aufgaben mit Stern (*) sind nur Beispiele für einen Aufgabentypus. Es wird erwartet, daß sie auch mit veränderten Angaben gelöst werden können.

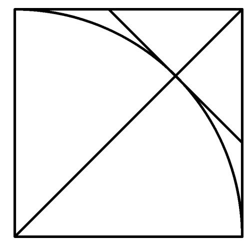
Teilbarkeit

(14*) *(Restklassen)*
Bestimme – wenn möglich – die inverse Restklasse zu
(a) $5 \bmod 11$, (b) $37 \bmod 47$, (c) $35 \bmod 60$, (d) $37 \bmod 60$.

(15) *(Teilbarkeitsregel)*
Zeige: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn die Ziffernsumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist.

(16) *(Teilbarkeitsregel)*
Wie sieht eine zu (15) analoge Regel für Teilbarkeit durch 11 aus?

(17) *(Inkommensurabilität)*
Zeige anhand der folgenden Skizze, daß beim Quadrat das Verhältnis der Diagonalen- zur Seitenlänge nicht rational ist.



(18) *(Inkommensurabilität)*
Zeige (durch Rechnung), daß beim regelmäßigen Fünfeck das Verhältnis der Seitenlänge zur Länge der Diagonale nicht rational ist.

Gruppen

(19) *(Gruppentafel)*
(a) Erstelle eine Multiplikationstafel für die prime Restklassengruppe modulo 20.
(b) Gib eine zu dieser Gruppe isomorphe Permutationsgruppe an (Zyklenschreibweise).

(20) ($\mathbb{R}^n$)
(a) Ist der $\mathbb{R}^3$ mit dem äußeren Produkt (*Kreuz- oder Vektorprodukt*) eine Gruppe?
(b) Ist der $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit der folgenden Operation eine Gruppe:
$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$?

(21) *(Nebenklassen)*
Zeige: Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{Z}_{12} & \rightarrow & \mathbb{Z}_4 \\ & & \overline{n}(\text{mod} 12) & \mapsto & \overline{n}(mod 4) \end{array}$$

ist ein Homomorphismus und ermittle die kanonische Zerlegung nach dem Homomorphiesatz.

(22) *(Kongruenzrelationen)*
Handelt es sich bei den folgenden Relationen im R^n um Äquivalenzrelationen und um Kongruenzrelationen bezüglich der Addition von Vektoren?
(a) $v \equiv w :\Leftrightarrow\ v = \lambda w$ (b) $v \equiv w :\Leftrightarrow\ v = \lambda w \wedge w = \mu v$

(23) *(kleine endliche Gruppen)*
Erstelle eine (möglichst vollständige) Liste kleiner Gruppen.
(Mindestens bis zur Ordnung $|G| \leq 6$.)