Algebra für Lehramtskandidaten

SS 2005 Peter Schmitt *Aufgaben für den 11. bzw. 12. April*

Beachte: Aufgaben mit Stern (*) sind nur Beispiele für einen Aufgabentypus. Es wird erwartet, daß sie auch mit veränderten Angaben gelöst werden können.

Gruppen

(19*) *(Gruppentafel)*
(a) Erstelle eine Multiplikationstafel für die prime Restklassengruppe modulo 20.
(b) Gib eine zu dieser Gruppe isomorphe Permutationsgruppe an (Zyklenschreibweise).

(20*) ($\mathbb{R}^n$)
(c) Ist der $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit der folgenden Operation eine Gruppe:
$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) := (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$?

(21*) *(Nebenklassen)*
Zeige: Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{Z}_{12} & \to & \mathbb{Z}_4 \\ & & \overline{n}(\mathrm{mod} 12) & \mapsto & \overline{n}(\mathrm{mod} 4) \end{array}$$

ist ein Homomorphismus und ermittle die kanonische Zerlegung nach dem Homomorphiesatz.
(Mit allen Details!)

(22*) *(Kongruenzrelationen)*
Handelt es sich bei den folgenden Relationen im $\mathbb{R}^n$ um Äquivalenzrelationen und um Kongruenzrelationen bezüglich der Addition von Vektoren? ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)
(a) $v \equiv w :\Leftrightarrow\ v = \lambda w$ (b) $v \equiv w :\Leftrightarrow\ v = \lambda w \wedge w = \mu v$

(23) *(kleine endliche Gruppen)*
Erstelle eine (möglichst vollständige) Liste kleiner Gruppen.
(Mindestens bis zur Ordnung $|G| \leq 6$.)

(24) *(Satz von Lagrange)*
Beweise: Bei endlichen Gruppen gilt:
Die Ordnung jeder Untergruppe ist Teiler der Gruppenordnung.

(25) *(Ordnung eines Gruppenelements)*
Zeige: Für jedes Element g einer endlichen Gruppe gibt es eine kleinste positive ganze Zahl n (die **Ordnung** von g), sodaß $g^n = e$ gilt, und diese Zahl ist Teiler der Ordnung der Gruppe.

(26) *(Umordnen)*
In n numerierten Fächern liegen n numerierte Kugeln.
Diese Kugeln werden folgendermaßen umgeordnet:
Die Kugel aus Fach i wird in Fach $\sigma_1(i)$ gelegt.
Danach werden die Kugeln nochmals umgeordnet:
Die Kugel aus Fach i wird in Fach $\sigma_2(i)$ gelegt.
Welche Permutation der Kugeln entsteht dadurch?

(27*) *(Tetraedergruppe)*
Beschreibe die Drehgruppe des (regelmäßigen) Tetraeders mittels Permutationen
(a) der Ecken, (b) der Seitenflächen, (c) der Kanten

(28*) *(Tetraedergruppe)*
Beschreibe die Symmetriegruppe des (regelmäßigen) Tetraeders mittels Permutationen der Seiten und ermittle (und klassifiziere) die Untergruppen.

(29*) *(Tetraedergruppe)*
Ermittle die Nebenklassenzerlegungen bezüglich einer Untergruppe der Ordnung 3.