Algebra für Lehramtskandidaten

SS 2005 Peter Schmitt *Aufgaben für den 18. bzw. 19. April*

Beachte: Aufgaben mit Stern (*) sind nur Beispiele für einen Aufgabentypus. Es wird erwartet, daß sie auch mit veränderten Angaben gelöst werden können.

Gruppen

Noch offen: (23), sowie (19b) am Montag und (24-25) am Dienstag.

(26) *(Umordnen)*
In n numerierten Fächern liegen n numerierte Kugeln.
Diese Kugeln werden folgendermaßen umgeordnet:
Die Kugel aus Fach i wird in Fach $\sigma_1(i)$ gelegt.
Danach werden die Kugeln nochmals umgeordnet:
Die Kugel aus Fach i wird in Fach $\sigma_2(i)$ gelegt.
Welche Permutation der Kugeln entsteht dadurch?

(27*) *(Tetraedergruppe)*
Beschreibe die Drehgruppe des (regelmäßigen) Tetraeders mittels Permutationen
(a) der Ecken, (b) der Seitenflächen, (c) der Kanten

(28*) *(Tetraedergruppe)*
Beschreibe die Symmetriegruppe des (regelmäßigen) Tetraeders mittels Permutationen der Seiten und ermittle (und klassifiziere) die Untergruppen.

(29*) *(Tetraedergruppe)*
Ermittle die Nebenklassenzerlegungen bezüglich einer Untergruppe der Ordnung 3.

(30*) *(Homorphiesatz)*
Zeige: Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \\ & (n,m) & \mapsto & (\overline{n}(\text{mod}2), \overline{m}(\text{mod}3)) \end{array}$$

ist ein Homomorphismus und
ermittle die kanonische Zerlegung nach dem Homomorphiesatz.

(31*) *(Homorphiesatz)*
Zeige: Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{Z}_{13}^* & \rightarrow & \mathbb{Z}_{13}^* \\ & \overline{n} & \mapsto & \overline{n}^3 \end{array}$$

ist ein Homomorphismus und
ermittle die kanonische Zerlegung nach dem Homomorphiesatz.

(32) *(Direktes Produkt)*
(a) *Zeige:* Sind G_1 und G_2 Gruppen (mit e_i als neutralem Element), so ist
$G_1 \times G_2$ mit $(g_1, g_2) \circ (g_1', g_2') := (g_1 g_1', g_2 g_2')$
eine Gruppe $(G_1 \otimes G_2, \circ)$ und die Projektionen
$\pi_i(g_1, g_2) := g_i \in G_i$ sind Homomorphismen.
(b) Wende den Homomorphiesatz auf π_1 (und π_2) an.

(33) *(Normalteiler)*
Zeige: Die Relation „H ist Normalteiler von G“ (für Gruppen) ist nicht transitiv.
(Betrachte dazu die Dieder-Gruppe D_4.)

(34) *(Würfelgruppe)*
Zeige: Die Drehgruppe eines Würfels ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4.
(Betrachte die Wirkung auf die Raumdiagonalen!)