Algebra für Lehramtskandidaten

SS 2005 Peter Schmitt *Aufgaben für den 2. bzw. 3. Mai*

Gruppen und ihre Struktur

(32) *(Direktes Produkt)*

(a) *Zeige:* Sind G_1 und G_2 Gruppen (mit e_i als neutralem Element), so ist
$G_1 \times G_2$ mit $(g_1, g_2) \circ (g_1', g_2') := (g_1 g_1', g_2 g_2')$
eine Gruppe $(G_1 \otimes G_2, \circ)$ und die Projektionen
$\pi_i(g_1, g_2) := g_i \in G_i$ sind Homomorphismen.

(b) Wende den Homomorphiesatz auf π_1 (und π_2) an.

(33) *(Normalteiler)*

Zeige: Die Relation „H ist Normalteiler von G“ (für Gruppen) ist nicht transitiv.
(Betrachte dazu die Dieder-Gruppe D_4, i.e. die Symmetriegruppe des Quadrates.)

(34) *(Würfelgruppe)*

Zeige: Die Drehgruppe eines Würfels ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4.
(Betrachte die Wirkung auf die Raumdiagonalen!)

(35*) *(Symmetrie des Würfels)*

(a) Ermittle die verschiedenen Arten von Bahnen,
die Symmetriegruppe des Würfels (auf seiner Oberfläche) bewirkt.
(Wieviele Elemente haben diese Bahnen?)

(b) Ermittle einen Fundamentalbereich.

(c) Gib (mindestens) ein Erzeugendensystem für die Symmetriegruppe des Würfels an.
Welche Beziehungen bestehen zwischen den Erzeugenden?

(36–37*) *(Friesmuster)*

Untersuche die weiter unten gezeigten Friesmuster:

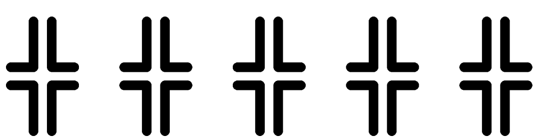
(a) (Symmetriegruppe) Ermittle alles Symmetrien.

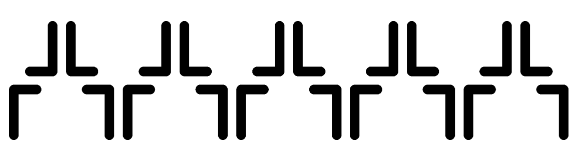
(b) Welche Symmetrien (Untergruppen) sind konjugiert?

(c) (Bahnen) Ermittle die Bahnen der Punkte der Ebene.

(d) Ermittle einen Fundamentalbereich.

(e) Ermittle (mindestens) ein Erzeugendensystem.
Welche Beziehungen bestehen zwischen den Erzeugenden?

(36) 

(37) 

(38) *(Friesmuster)*

Sind die Symmetriegruppen der beiden Muster aus (36) und (37) „gleich“?
Sind sie isomorph?

(39) *(Erzeugte Untergruppen)*

Es sei T_a die Translation $v \mapsto v + a$ im $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimme $\langle T_a, T_b \rangle$ für $a = (6,3)$ und $b = (10,5)$.

(b) Gib ein Muster an, das diese Gruppe als Symmetriegruppe hat.

(c) Was ist $\langle ma, na \rangle$ für beliebiges $m, n \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{R}^2$?