

Algebra für Lehramtskandidaten

SS 2005 Peter Schmitt

Aufgaben für den 23. bzw. 24. Mai

(39) (*Erzeugte Untergruppen*)

Es sei T_a die Translation $v \mapsto v + a$ im \mathbb{R}^2 .

(a) Bestimme $\langle T_a, T_b \rangle$ für $a = (6, 3)$ und $b = (10, 5)$.

(b) Gib ein Muster an, das diese Gruppe als Symmetriegruppe hat.

(c) Was ist $\langle ma, na \rangle$ für beliebiges $m, n \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{R}^2$?

Abelsche Gruppen und ihre Struktur

(40*) (*Sylowgruppen*)

Ermittle die p -Sylowgruppen der

(a) \mathbb{Z}_{1200}

(b) Symmetriegruppe des Würfels.

(c) $\mathbb{Z}_{14} \otimes \mathbb{Z}_{14}$

(d) \mathbb{Z}_{125}^*

(41) (*zyklische Untergruppen*)

Erkläre den Zerlegungssatz anhand der von $\overline{20}$ in \mathbb{Z}_{180} erzeugten Untergruppe.

Kann auch die von $\overline{60}$ erzeugte Untergruppe abgespalten werden?

(42*) (*Struktur abelscher Gruppen*)

Welche der folgenden Gruppen sind isomorph, welche nicht (*und warum*)?

$\mathbb{Z}_{60}, \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5$.

(43) (*Produkt zyklischer Gruppen*)

Zeige: Das direkte Produkt zweier zyklischer Gruppen C_n und C_m ist zyklisch, wenn n und m relativ prim sind. Gilt auch die Umkehrung?

(44*) (*Primitivwurzel*)

Finde eine Primitivwurzel modulo 27 und erstelle eine Indextafel.

(45*) (*algebraische Kongruenz*)

Finde (*alle*) Lösungen der Kongruenzgleichung $7x^6 + 2 \equiv 0 \pmod{27}$.