Algebra für Lehramtskandidaten

SS 2005 Peter Schmitt *Aufgaben für den 30. bzw. 31. Mai*

Abelsche Gruppen und ihre Struktur

(40*) *(Sylowgruppen)*
Ermittle die p-Sylowgruppen der
(a) $\mathbb{Z}_{1200}$
(b) Symmetriegruppe des Würfels (*Tip:* Würfel sind auch quadratische Prismen.)
(c) $\mathbb{Z}_{14} \otimes \mathbb{Z}_{14}$
(d) $\mathbb{Z}_{125}^*$ (*Hinweis:* 2 ist Primitivwurzel.)

(41) *(zyklische Untergruppen)*
Erkläre den Zerlegungssatz anhand der von $\overline{20}$ in $\mathbb{Z}_{180}$ erzeugten Untergruppe.
Kann auch die von $\overline{60}$ erzeugte Untergruppe abgespaltet werden?

(42*) *(Struktur abelscher Gruppen)*
Welche der folgenden Gruppen sind isomorph, welche nicht *(und warum)*?
$\mathbb{Z}_{60}$, $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \otimes \mathbb{Z}_5$
(*Hinweis:* Beachte auch die Aussage von (43).)

(43) *(Produkt zyklischer Gruppen)*
Zeige: Das direkte Produkt zweier zyklischer Gruppen C_n und C_m ist zyklisch, wenn n und m relativ prim sind. Gilt auch die Umkehrung?

(43b) *(Ordnung in zyklischen Gruppen)*
Zeige: Es gilt $\operatorname{ord}(g^n) = \frac{\operatorname{ord} g}{(\operatorname{ord} g, n)} = \frac{[\operatorname{ord} g, n]}{n}$.

prime Restklassen

(44*) *(Primitivwurzel)*
Finde eine Primitivwurzel modulo 27 und erstelle eine Indextafel.

(45*) *(algebraische Kongruenz)*
Finde *(alle)* Lösungen der Kongruenzgleichung $7x^6 + 2 \equiv 0 \bmod 27$.
(Verwende (44)!)

(46*) *(φ-Funktion)*
Gib die beim Beweis der Multiplikativität der Eulerschen φ-Funktion verwendete Bijektion für $\mathbb{Z}_{10}^*$, $\mathbb{Z}_7^*$ und $\mathbb{Z}_{70}^*$ explizit an.
Ist sie auch ein Isomorphismus?

zahlentheoretische Funktionen

(47) *(Faltung)*
Zeige: Die Faltung zahlentheoretischer Funktionen ist assoziativ.

(48) *(Möbiussche Umkehrformel)*
Rechne nach: Die Möbiussche Umkehrfunktion μ ist bezüglich der Faltung zur 1-Funktion invers.