Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Aufgabe 1

zu §1. Maße und σ-Algebren

$\boxed{1}$ Sei Ω eine Menge. Zeige:

(a) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, dann gilt $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

(b) Ist $A \subseteq \Omega$ und $\mathcal{G} = \{A\}$, dann gilt $\sigma(\mathcal{G}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

$\boxed{2}$ Sei Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$, für welche A oder A^c (höchstens) abzählbar ist (vgl. VO Beisp.1.3(2)). Zeige, dass das System $\mathcal{E}$ aller endlichen Teilmengen von Ω ein Erzeuger für $\mathcal{A}$ ist, d.h. dass $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ gilt.

$\boxed{3}$ [Zählmaß, vgl. VO Beisp.1.8(2)] Sei Ω eine Menge und definiere $\zeta \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ durch

$$\zeta(A) = \begin{cases} \infty & A \text{ nicht endlich,} \\ \operatorname{card}(A) & A \text{ endlich,} \end{cases} \qquad (A \subseteq \Omega).$$

Zeige, dass ζ ein Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ ist.

$\boxed{4}$ Sei Ω eine *überabzählbare* Menge und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$, für welche A oder A^c (höchstens) abzählbar ist. Definiere $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ abzählbar,} \\ 1 & A^c \text{ abzählbar,} \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

Zeige, dass μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

zu §2. Äußere Maße

$\boxed{5}$ [Äußeres Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, vgl. VO Bem.2.3] Für (achsenparallele) Quader im $\mathbb{R}^n$ von der Form $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ (mit $a_j \leq b_j$, $j = 1, \ldots, n$) setzen wir wie üblich

$$\operatorname{Vol}(Q) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Weiters definieren wir die Abbildung $\lambda^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ durch

$\lambda^*(A) := \inf\{\sum_{Q\in\mathcal{U}} \mathrm{Vol}(Q) \mid \mathcal{U}$ ist endliche oder abzählbare Überdeckung von A durch Quader$\}$.

Zeige, dass λ^* ein äußeres Maß ist.

(Anleitung für den Beweis der σ-Subadditivität von λ^*: Sei $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; falls für ein $n \in \mathbb{N}$ schon $\lambda^*(A_n) = \infty$ gilt, ist nichts mehr zu zeigen; sei also $\lambda^*(A_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig; dann exisitiert zu jedem n eine Überdeckung $(Q_l^n)_{l\in\mathbb{N}}$ von A_n durch Quader mit $\sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_l^n) < \lambda^*(A_n) + \varepsilon/2^{n+1}$.)

zu Canotr Menge

$\boxed{\mathbf{6}}$ Die Cantor Menge $\mathcal{C}$ ist induktiv definiert. Sei $I = [0,1]$ das abgeschlossene einheits Interval. Im ersten Schritt entfernen wir das mittlere Drittel aus I um zwei disjunkt abgeschlossene intervale zu erhalten. Sei $K_1 := [0,\frac{1}{3}]\bigcup[\frac{2}{3},1]$. in naechsten Schritt entfernen wir jeweils das mittlere Drittel beide intervale in K_1. Da durch erhalten wir

$$K_2 := [0,\frac{1}{9}]\bigcup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\bigcup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\bigcup[\frac{8}{9},1].$$

Induktiv definiern wir K_{n+1} indem wir jeweils der mittlere Drittel der intervale in K_n entfernen. Die Cantor Menge ist definiert:

$$\mathcal{C} := \bigcap_n K_n,$$

ist die Menge aller Punkte die ausdunung ueberleben.

(a) Zeige, dass jedes $x \in \mathcal{C}$ hat eine eindeutige Entwicklung der Form

$$x = \sum_k q_k 3^{-k}, \qquad q_k \in \{0,1\},$$

hat.

(b) Zeige, dass die Abblidung $f : \mathcal{C} \to [0,1]$ definiert durch

$$f(x) := \sum_k \frac{q_k}{2} 2^{-k} \qquad \text{wo}\, x = \sum_k q_k 3^{-k} \in \mathcal{C},$$

stetig und injektiv ist.