Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Aufgabe 11

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sein μ, ν σ-endliche Maße mit $\mu \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$. Zeige, dass $d\nu/d\mu \neq 0$ μ f.ü. und

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1},$$

μ f.ü.

zu §20 und §21. Produktmaße, mehrfache Integrale

Sei $a < b$. Für eine Funktion $f\colon [a,b] \to [0,\infty[$ bezeichne $G(f) := \{\ (x,y) \mid a \leq x \leq b, y = f(x)\}$ den Graphen und $O(f) := \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ die Ordinatenmenge von f, aufgefasst jeweils als Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Es bezeichne $\mathcal{B}_d$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ und λ_d das Borel-Lebesgue-Maß (gegebenenfalls eingeschränkt auf entsprechende Intervalle bzw. Quader).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Zeige: f ist Borel-messbar $\iff$ $O(f) \in \mathcal{B}_2$
(Hinweis: für '$\Rightarrow$' betrachte $g(x,y) := f(x) - y$, $g\colon [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; für '$\Leftarrow$' denke an Schnitte.)

$\boxed{\mathbf{3}}$ Ist f Borel-messbar, dann gilt die „aus der Schule bekannte Formel“

$$\lambda_2(O(f)) = \int f \, d\lambda_1.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Ist f Borel-messbar, dann folg $G(f) \in \mathcal{B}_2$ und $\lambda_2(G(f)) = 0$.