Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Aufgabe 12

$\boxed{\mathbf{1}}$ (Partielle Integration) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar und für $x \in [a, b]$ seien $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ und $G(x) := \int_a^x g(t)dt$. Dann gilt

$$\int\limits_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - \int\limits_a^b f(x)G(x)dx.$$

[Hinweis: wende Fubini auf $f(x)g(x)\mathbb{1}_E$ an, wobei $E = \{(x, y) : a \leq y \leq x \leq b\}$]

Zu Polarkoordinaten

Sei S^1 der Einheitskreis, d.h. die Menge der $\theta \in \mathbb{R}^2$ deren Abstand vom Ursprung 0 gleich 1 ist. Sei ρ ein Maß auf S^1 wie folgt definiert: Ist $A \subset S^1$ eine Borelmenge, so sei $\tilde{A}$ die Menge der Punkte $\{r\theta : \theta \in A,\ 0 < r < 1\}$ und man definiere,

$$\rho(A) := 2\lambda_2(\tilde{A}).$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Zeige, dass ρ ein Maß auf S^1 definiert.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Für jede nichtnegative Borelfunktion f zeige, dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)dx = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{S^1} f(r\theta)d\rho \right) rdr.$$

Schwierige Aufgabe

$\boxed{\mathbf{4}}$ Verwende den Satz von Fubini und die Relation

$$\frac{1}{x} = \int\limits_0^\infty e^{-xt}dt,$$

um zu zeigen, dass

$$\lim_{a \to \infty} \int\limits_0^a \frac{sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$