Maß- und Integrationstheorie (WS 10/11)

Shantanu Dave & Günther Hörmann

Aufgabe 2

zu Cantor Menge

$\boxed{\mathbf{1}}$ Die Cantor Menge $\mathcal{C}$ ist induktiv definiert. Sei $I = [0,1]$ das abgeschlossene einheits Interval. Im ersten Schritt entfernen wir das mittlere Drittel aus I um zwei disjunkt abgeschlossene intervale zu erhalten. Sei $K_1 := [0, \frac{1}{3}] \bigcup [\frac{2}{3}, 1]$. in naechsten Schritt entfernen wir jeweils das mittlere Drittel beide intervale in K_1. Da durch erhalten wir

$$K_2 := [0, \frac{1}{9}] \bigcup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \bigcup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \bigcup [\frac{8}{9}, 1].$$

Induktiv definiern wir K_{n+1} indem wir jeweils der mittlere Drittel der intervale in K_n entfernen. Die Cantor Menge ist definiert:

$$\mathcal{C} := \bigcap_n K_n,$$

ist die Menge aller Punkte die ausdunung berleben.

(a) Zeige, dass jedes $x \in \mathcal{C}$ hat eine eindeutige Entwicklung der Form

$$x = \sum_k q_k 3^{-k}, \qquad q_k \in \{0, 2\},$$

hat.

(b) Zeige, dass die Abblidung $f : \mathcal{C} \to [0,1]$ definiert durch

$$f(x) := \sum_k \frac{q_k}{2} 2^{-k} \qquad \text{wo}\, x = \sum_k q_k 3^{-k} \in \mathcal{C},$$

stetig und surjektiv ist.

$\boxed{\mathbf{2}}$ [Äußeres Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, vgl. VO Bem.2.3] Für (achsenparallele) Quader im $\mathbb{R}^n$ von der Form $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ (mit $a_j \le b_j$, $j = 1, \ldots, n$) setzen wir wie üblich

$$\mathrm{Vol}(Q) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Weiters definieren wir die Abbildung $\lambda^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ durch

$$\lambda^*(A) := \inf\{\sum_{Q\in\mathcal{U}} \mathrm{Vol}(Q) \mid \mathcal{U} \text{ ist endliche oder abzählbare Überdeckung von } A \text{ durch Quader}\}.$$

Für jede *beschränkte* Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir ein sogenanntes inneres Maß durch

$$\lambda_*(A) := \mathrm{Vol}(Q) - \lambda^*(Q \setminus A),$$

wobei Q ein beliebiger Quader mit $Q \supseteq A$ ist. Zeige:

(a) Der Wert $\lambda_*(A)$ ist unabhängig von der Wahl von Q.

(b) Die λ^*-Messbarkeit einer beschränkten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist äquivalent zur Bedingung

$$\lambda^*(A) = \lambda_*(A).$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sei $\Omega = \{1,2,3\}$ und $\mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ gegeben durch

$$\mu^*(\emptyset) := 0, \quad \mu^*(\Omega) := 2 \quad \text{ und } \quad \mu^*(B) := 1 \text{ für } B \subseteq \Omega \text{ mit } 0 < \mathrm{card}(B) < 3.$$

Zeige, dass μ^* ein äußeres Maß ist, sodass für jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ die Gleichung

$$\mu^*(\Omega) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c)$$

gilt und dennoch die trivialen Teilmengen $\emptyset$ und Ω die einzigen μ^*-messbaren Mengen sind.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sei Ω eine Menge. Wir statten $\mathcal{P}(\Omega)$ mit der symmetrischen Mengendifferenz $\triangle$ als „Addition" und dem Mengendurchschnitt $\cap$ als „Multiplikation" aus. Zeige:

(a) $(\mathcal{P}(\Omega), \triangle, \cap)$ ist ein kommutativer Ring mit Nullelement $\emptyset$ und Einselement Ω.

(b) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann ein Ring im Sinne der Definition 3.1 aus der VO, wenn $\mathcal{R}$ ein Unterring des Ringes $(\mathcal{P}(\Omega), \triangle, \cap)$ gemäß (a) ist.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sei Ω eine *abzählbar-unendliche* Menge und $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ bestehe aus jenen Teilmengen $A \subseteq \Omega$, für welche A oder A^c endlich ist.

(a) Zeige: $\mathcal{R}$ ist ein Ring, aber keine σ-Algebra.

(b) Definiere $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ endlich}, \\ 1 & A^c \text{ endlich}, \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{R}).$$

Zeige: μ ist ein Inhalt auf $\mathcal{R}$, aber kein Prämaß.

zu §4. Wann ist ein Inhalt ein Maß?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sei Ω eine *abzählbar-unendliche* Menge und der Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ bestehe (wie in Aufgabe $\boxed{5}$) aus jenen Teilmengen $A \subseteq \Omega$, für welche A oder A^c endlich ist.

Definiere $\nu\colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ durch $\nu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ endlich,} \\ \infty & A^c \text{ endlich,} \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{R}).$

(a) Zeige, dass ν ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ ist, der die folgende Bedingung aus Proposition 4.1 der VO erfüllt: für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ gilt $\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = 0$.

(b) Zeige, dass ν kein Prämaß ist. Widerspricht das dem oben genannten Satz aus der VO?